TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Heidi Luukkonen

Sahlqvistin kaavat

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Maaliskuu 2013

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
LUUKKONEN, HEIDI: Sahlqvistin kaavat
Pro gradu -tutkielma, 45 s.
Matematiikka
Maaliskuu 2013

Tiivistelmä

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutustutaan Henrik Sahlqvistin esittelemiin Sahlqvistin kaavoihin. Sahlqvistin kaavat ovat esimerkkejä sellaisista modaalilogiikan kaavoista, joilla on aina predikaattilogiikassa korrespondentti. Aihetta tarkastellaan perusmodaalilogiikan näkökulmasta.

Tutkielman aluksi luvussa 2 käsitellään modaalilogiikan perusteita, sen syntaksia ja semantiikkaa, pohjatietona tutkielman varsinaiseen aiheeseen. Tässä luvussa määritellään modaalilogiikan kieli sekä modaalilogiikan malli ja kehys. Lisäksi tarkastellaan modaalilogiikan kaavan validisuutta mallissa ja kehyksessä. Luvussa 3 käsitellään korrespondenssiteoriaa, joka tarkastelee riittäviä ehtoja sille, että modaalilogiikan kaavalla on predikaattilogiikassa korrespondentti. Tarkastelu tapahtuu kehystasolla. Luvussa käsitellään muun muassa kehysmääriteltävyyttä ja esitetään joitakin esimerkkejä sellaisista modaalisesti määriteltävistä kehysluokista, jotka ovat määriteltävissä myös predikaattilogiikassa.

Luvun 4 aluksi määritellään vielä käsitteitä, jotka ovat tarpeellisia Sahlqvistin kaavojen tarkastelussa. Ensin määritellään positiivinen ja negatiivinen kaava, ja tämän jälkeen tarkastellaan modaalilogiikan kaavan kasvamista ja vähenemistä. Lisäksi tutustutaan kahteen eri kaavajoukkoon, uniformisiin ja suljettuihin kaavoihin. Nämä kaavat ovat sellaisia modaalilogiikan kaavoja, joilla on aina predikaattilogiikassa korrespondentti.

Sahlqvistin kaavojen tarkastelu jaetaan kolmeen osaan. Ensin tarkastellaan todella yksinkertaisia Sahlqvistin kaavoja, jonka jälkeen tarkastelu laajennetaan yksinkertaisiin Sahlqvistin kaavoihin ja lopuksi Sahlqvistin kaavoihin. Kaikki nämä kaavat määritellään ja niistä annetaan myös esimerkkejä. Lisäksi luonnostellaan todistusta sille, että todella yksinkertaisella Sahlqvistin kaavalla on predikaattilogiikassa korrespondentti. Yksinkertaisten Sahlqvistin kaavojen ja Sahlqvistin kaavojen tapauksessa tämä todistetaan vastaavasti. Tutkielman lopuksi todetaan, ettei ole olemassa sellaista menetelmää, jolla voitaisiin selvittää, onko mielivaltaisella modaalilogiikan kaavalla predikaattilogiikassa korrespondentti. Tämä ratkeamaton ongelma tunnetaan Chagrovan lauseena. Tutkielman päälähdeteoksena on ollut kirja *Modal logic* (Blackburn, de Rijke, Venema).

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan modaalilogiikan ja ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan vastaavuuksia. Modaalilogiikan kaavalla voi olla predikaattilogiikassa korrespondentti. Korrespondenssiteoria tarkastelee riittäviä ehtoja sille, että näin on. Tähän liittyen on olemassa syntaksiin perustuvia kriteerejä. Tämä tutkielma tutustuttaa lukijan näistä kriteereistä tunnetuimpaan, Henrik Sahlqvistin esittelemiin Sahlqvistin kaavoihin.

Tutkielman aluksi tarkastellaan modaalilogiikan peruskäsitteitä, sen syntaksia ja semantiikkaa. Luvussa 2.1 määritellään muun muassa modaalilogiikan kielen aakkosto sekä modaalilogiikan kaavat. Luvussa 2.2 määritellään esimerkiksi modaalilogiikan malli ja kehys sekä tarkastellaan modaalilogiikan kaavan validisuutta mallissa ja kehyksessä. Määritelmiä ja käsitteitä tarkastellaan molemmissa luvuissa myös esimerkkien avulla.

Luvussa 3 tarkastellaan korrespondenssiteoriaa, mikä tapahtuu kehystasolla. Korrespondenssiteoria perustuu määritelmään, jonka mukaan modaalilogiikan kaavaa vastaa predikaattilogiikan kaava, jos modaalilogiikan kaavan kehysvalidisuuden kanssa on yhtäpitävää jokin predikaattilogiikan kaava. Tarkastelun aluksi määritellään luvussa 3.1 standardikäännös, jolla modaalilogiikan kaavasta saadaan predikaattilogiikan kaava. Luvussa 3.2 tarkastellaan kehysmääriteltävyyttä ja esitetään muutama esimerkki sellaisista modaalisesti määriteltävistä kehysluokista, jotka ovat määriteltävissä myös predikaattilogiikassa.

Luvun 4 aluksi esitetään käsitteitä, joita tarvitaan Sahlqvistin kaavojen tarkastelussa. Ensin luvussa 4.1 tutustutaan positiivisiin ja negatiivisiin kaavoihin, ja tämän jälkeen luvussa 4.2 määritellään modaalilogiikan kaavojen kasvaminen ja väheneminen. Luvussa 4.3 esitellään kaksi kaavajoukkoa, uniformiset ja suljetut kaavat. Lisäksi todistetaan, että kaikilla uniformisilla kaavoilla ja kaikilla suljetuilla kaavoilla on predikaattilogiikassa korrespondentti.

Tässä tutkielmassa Sahlqvistin kaavat jaetaan kolmeen luokkaan: todella yksinkertaisiin ja yksinkertaisiin Sahlqvistin kaavoihin sekä Sahlqvistin kaavoihin. Luvussa 4.4 määritellään todella yksinkertaiset Sahlqvistin kaavat ja esitetään niistä muutama esimerkki. Lisäksi luonnostellaan todistusta sille, että todella yksinkertaisella Sahlqvistin kaavalla on predikaattilogiikassa korrespondentti. Luvussa 4.5 Sahlqvistin kaavojen tarkastelu laajennetaan yksinkertaisiin Sahlqvistin kaavoihin ja luvussa 4.6 Sahlqvistin kaavoihin. Molemmista kaavoista esitetään myös muutama esimerkki. Tutkielman lopuksi esitetään Chagrovan lause, jonka mukaan ei ole olemassa sellaista menetelmää, jolla voitaisiin selvittää, onko mielivaltaisella modaalilogiikan kaavalla predikaattilogiikassa korrespondentti.

Tutkielman lukijalta edellytetään propositiologiikan sekä ensimmäisen ja toisen kertaluvun logiikan perusasioiden tuntemista. Lisäksi oletetaan, että lukija tuntee erilaiset todistusmenetelmät. Tutkielman päälähdeteos on ollut kirja *Modal logic* (Blackburn, de Rijke, Venema). Lisäksi lähteinä on käytetty kirjoja *Modal Logic: an introduction* (Chellas) ja *Johdatus modaalilogiikkaan* (Rantala, Virtanen) sekä verkkojulkaisuja *SCAN is a complete for all Sahlqvist formulae* (Goranko, Hustadt, Schmidt, Vakarelov) ja *Elementary canonical formulae: extending Sahlqvist's theorem* (Goranko, Vakarelov).

2 Modaalilogiikasta

Tässä luvussa tarkastellaan yleisesti modaalilogiikkaa, sen syntaksia ja semantiikkaa, jotka ovat pohjatietona tämän työn varsinaiselle aiheelle. Koska lukijan ei edellytetä tuntevan modaalilogiikkaa entuudestaan, aihetta käsitellään määritelmien ja lauseiden lisäksi esimerkein.

2.1 Modaalilogiikan syntaksi

Modaalilogiikassa tarkastellaan modaliteettien eli modaalikäsitteiden loogisia piirteitä. Tässä työssä käsitellään aleettista modaalilogiikkaa, jonka modaliteetit ilmaisevat *mahdollisuutta* ja *välttämättömyyttä*. Mahdollisuuden kuvaamiseksi on luotu yksipaikkainen modaalioperaattori, *mahdollisuusoperaattori* $\Diamond$. Vastaavasti yksipaikkaisella modaalioperaattorilla, *välttämättömyysoperaattorilla* $\Box$ kuvataan välttämättömyyttä. Nämä operaattorit ovat toistensa *duaalioperaattorit*, jolloin välttämättömyysoperaattori voidaan määritellä mahdollisuusoperaattorin avulla:

$$\Box \overset{def}{=} \neg\Diamond\neg.$$

Modaalilogiikan kieli saadaan propositiologiikan kielestä lisäämällä siihen vain mahdollisuusoperaattori $\Diamond$. Modaalilogiikan kielelle käytetään merkintää ML. Määritellään nyt modaalilogiikan kielen aakkosto.

Määritelmä 2.1. (Vert. [1, s. 9] ja [3, s. 43-44]) Modaalilogiikan kielen aakkosto muodostuu seuraavista perus- eli primitiivisymboleista:

- lausemuuttujat eli atomikaavat eli propositiosymbolit $p_1, p_2, p_3, \ldots$
- falsum $\perp$
- konnektiivit $\neg$ ja $\vee$
- mahdollisuusoperaattori $\Diamond$
- sulut (,).

Näistä perussymboleista saadaan muodostettua hyvin muodostettuja ilmauksia eli kaavoja. Määritellään nämä seuraavaksi.

Määritelmä 2.2. (Vert. [3, s. 44]) Perussymboleista saadaan muodostettua kaavoja seuraavilla kaavanmuodostussäännöillä:

1. Propositiosymbolit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ovat kaavoja.
2. $\perp$ (falsum) on kaava.
3. Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja, niin $\neg\phi$ ja $(\phi \vee \psi)$ ovat kaavoja.
4. Jos ϕ on kaava, niin $\Diamond\phi$ on kaava.
5. Muita kaavoja ei ole.

Muut konnektiivit, $\wedge$, $\to$ ja $\leftrightarrow$, määritellään negaation $\neg$ ja disjunktion $\vee$ avulla seuraavan määritelmän mukaisesti. Lisäksi *verum* $\top$ määritellään *falsumin* $\perp$ negaationa:

$$\top = \neg\perp.$$

Määritelmä 2.3. (Vert. [1, s. 10]) Olkoot ϕ ja ψ modaalilogiikan kaavoja. Tällöin kaavat $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$ ja $\phi \leftrightarrow \psi$ määritellään konnektiiveilla $\neg$ ja $\vee$ seuraavasti:

(i) $\phi \wedge \psi \overset{def}{=} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ (konjunktio),

(ii) $\phi \to \psi \overset{def}{=} \neg\phi \vee \psi$ (implikaatio) ja

(iii) $\phi \leftrightarrow \psi \overset{def}{=} (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi) \overset{def}{=} \neg(\neg(\neg\phi \vee \psi) \vee \neg(\neg\psi \vee \phi))$ (ekvivalenssi).

Modaalilogiikassa on ääretön joukko propositiosymboleja. Usein kuitenkin sovelluksissa propositiosymboleiden joukko ei ole ääretön vaan äärellinen. Lisäksi joukko voi olla myös tyhjä. Propositiosymbolien äärelliselle joukolle käytetään merkintää Φ, ja propositosymboleita merkitään symbolien $p_1, p_2, p_3, \ldots$ lisäksi usein myös symboleilla $p, q, r, \ldots$ Kun propositiosymbolien joukko on kiinnitetty äärelliseksi joukoksi Φ, niin modaalilogiikan kaavojen joukolle voidaan käyttää merkintää $ML(\Phi)$. Tällöin myös määritelmän 2.2 ensimmäinen kohta kirjoitetaan uudestaan muodossa: kaikki propositiosymbolit $p \in \Phi$ ovat kaavoja.

Tarkastellaan vielä kahta esimerkkiä, joista ensimmäisessä modaalilogiikan kaava esitetään vain konnektiivien $\neg$ ja $\vee$ sekä mahdollisuusoperaattorin $\Diamond$ avulla. Toisessa esimerkissä osoitetaan kaavanmuodostussääntöjen perusteella, että tarkasteltava modaalilogiikan kaava todella on kaava.

Esimerkki 2.1. Esitetään kaava $\psi = \Box(\neg p_1 \land p_2) \to (\Box p_3 \land \Box\neg p_2)$ vain negaation $\neg$, disjunktion $\lor$ ja mahdollisuusoperaattorin $\Diamond$ avulla. Muistetaan lisäksi kaksoisnegaatiosääntö: $\neg\neg\phi \Leftrightarrow \phi$.

$$\begin{aligned}
\psi &= \Box(\neg p_1 \land p_2) \to (\Box p_3 \land \Box\neg p_2) \\
&= \neg\Box(\neg p_1 \land p_2) \lor (\Box p_3 \land \Box\neg p_2) \\
&\text{(määritelmän 2.3 kohdan (ii) perusteella)} \\
&= \neg\Box\neg(\neg\neg p_1 \lor \neg p_2) \lor \neg(\neg\Box p_3 \lor \neg\Box\neg p_2) \\
&\text{(määritelmän 2.3 kohdan (i) perusteella)} \\
&= \neg\neg\Diamond\neg\neg(\neg\neg p_1 \lor \neg p_2) \lor \neg(\neg\neg\Diamond\neg p_3 \lor \neg\neg\Diamond\neg\neg p_2) \\
&\text{(välttämättömyysoperaattorin määritelmän perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \Diamond(p_1 \lor \neg p_2) \lor \neg(\Diamond\neg p_3 \lor \Diamond p_2) \\
&\text{(kaksoisnegaatiosäännön perusteella).}
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.2. Osoitetaan vielä, että kaava $\phi = \Box(p_1 \lor \neg p_2) \to \Diamond p_3$ on modaalilogiikan kaava kaavanmuodostussääntöjen ja määritelmän 2.3 perusteella.

1. Ensiksikin propositiosymbolit p_1, p_2 ja p_3 ovat kaavoja.
2. Koska p_2 ja p_3 ovat kaavoja, $\neg p_2$ ja $\Diamond p_3$ ovat kaavoja.
3. Koska p_1 ja $\neg p_2$ ovat kaavoja, $p_1 \lor \neg p_2$ on kaava.
4. Koska $p_1 \lor \neg p_2$ on kaava, $\Box(p_1 \lor \neg p_2) = \neg\Diamond\neg(p_1 \lor \neg p_2)$ on kaava.
5. Lopulta koska $\Box(p_1 \lor p_2)$ ja $\Diamond p_3$ ovat kaavoja, $\phi = \Box(p_1 \lor \neg p_2) \to \Diamond p_3 = \neg(\Box(p_1 \lor \neg p_2)) \lor \Diamond p_3$ on kaava.

Modaalilogiikan kaava ϕ voi siis muodostua useista kaavoista. Kaikkia näitä kaavoja kutsutaan kaavan ϕ *alikaavoiksi.* Jos kaava on pelkkä propositiosymboli, sen ainoa alikaava on kaava itse. Näin ollen myös alkuperäinen kaava ϕ on itsensä alikaava. Myös kaavan ϕ alikaavojen alikaavat ovat kaavan ϕ alikaavoja. Määritellään nyt alikaavojen joukko rekursiivisesti.

Määritelmä 2.4. (Vert. [2, s. 28]) Kaavan ϕ *alikaavojen joukko* $\mathrm{Sub}(\phi)$ määritellään rekursiivisesti:

- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$, kun $p \in \Phi$
- $\mathrm{Sub}(\bot) = \{\bot\}$
- $\mathrm{Sub}(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup \mathrm{Sub}(\phi)$
- $\mathrm{Sub}(\phi \lor \psi) = \{\phi \lor \psi\} \cup \mathrm{Sub}(\phi) \cup \mathrm{Sub}(\psi)$
- $\mathrm{Sub}(\Diamond\phi) = \{\Diamond\phi\} \cup \mathrm{Sub}(\phi)$.

Sulkuja käytetään ryhmittelemään ja selventämään kaavoja, mutta seuraavien sääntöjen mukaisesti ne voidaan myös jättää merkitsemättä. Ensiksikin kaavojen uloimmat sulut voidaan jättää pois. Lisäksi sulkuja, jotka ovat konnektiivien vaikutusalan ulkopuolella, ei ole tarpeellista merkitä. Eri konnektiivien vaikutusala on erilainen, eli ne ovat eri vahvuisia. Konnektiivien vaikutusalat määräytyvät seuraavasti (vert.[3, s. 45]):

- Negaation $\neg$ ja modaalioperaattorien, $\Diamond$ ja $\Box$, vaikutusala on niitä välittömästi seuraava kaava.
- Implikaation $\to$ ja ekvivalenssin $\leftrightarrow$ vaikutusala on suurempi kuin konjunktion $\wedge$ ja disjunktion $\vee$.

Näiden lisäksi disjunktio ja konjunktio ovat liitännäisiä, joten kaavoihin, jotka sisältävät vain joko disjunktioita tai konjunktiota, sulkuja ei tarvitse merkitä.

Esimerkki 2.3. Tarkastellaan vielä esimerkin 2.2 kaavaa $\phi = \Box(p_1 \vee \neg p_2) \to \Diamond p_3$. Jos siitä jätetään sulut pois, kaava tulee muotoon $\phi' = \Box p_1 \vee \neg p_2 \to \Diamond p_3$. Tällöin kaavat ϕ ja ϕ' eivät ole samat, sillä kaavassa ϕ välttämättömyysoperaattori koskee kaavaa $p_1 \vee \neg p_2$ mutta kaavassa ϕ' vain kaavaa p_1. Lisäksi kaavassa ϕ suoritaan ensin disjunktio ja vasta sitten implikaatio. Sen sijaan kaavassa ϕ' suoritetaan ensin implikaatio ja sitten disjunktio. Kaavasta ϕ ei siis voi jättää sulkuja pois.

2.2 Modaalilogiikan semantiikka

Lähdetään nyt tarkastelemaan modaalilogiikan semantiikkaa, jossa käsitellään mahdollisia maailmoja sekä totuusarvoja. Modaalilogiikassa kaavojen totuutta tarkastellaan malleissa ja kehyksissä.

Kehys $\mathcal{F}$ koostuu epätyhjästä *mahdollisten maailmojen joukosta* W sekä tässä maailmojen joukossa kaksipaikkaisesta relaatiosta, *vaihtoehtorelaatiosta* R. Mahdollisten maailmojen joukko W sisältää ne maailmat, jotka ovat mahdollisia tarkasteltavassa tilanteessa. Vaihtoehtorelaatio R puolestaan kuvaa sitä, mitkä maailmat ovat mahdollisia maailman w suhteen.

Mallit $\mathcal{M}$ koostuvat edellä määritellyistä kehyksistä $\mathcal{F}$ sekä niihin lisätyistä *valuaatioista* V. Valuaatio V on kuvaus propositiosymbolien joukolta mahdollisten maailmojen potenssijoukolle $\mathcal{P}(W)$. Kun propositiosymbolien joukko on kiinnitetty äärelliseksi joukoksi Φ, niin tällöin valuaatio V on kuvaus joukolta Φ joukolle $\mathcal{P}(W)$. Valuaatio ilmaisee propositiosymbolien totuusarvot jokaisessa maailmassa $w \in W$. Valuaation ja relaation avulla saadaan selville modaalilogiikan kaavojen ϕ totuudet maailmassa $w \in W$.

Määritellään seuraavaksi malli ja kehys täsmällisesti. Niistä käytetään usein nimityksiä *Kripke-malli* ja *Kripke-kehys* tai lyhyesti *K-malli* ja *K-kehys*, sillä niiden muotoilut ovat peräisin Saul Kripkeltä [[3, s. 37].

Määritelmä 2.5. (Vert. [1, s. 16]) *Kripke-kehys* on struktuuri $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, jossa W on epätyhjä maailmojen joukko ja $R \subseteq W \times W$ on kaksipaikkainen relaatio joukossa W.

Määritelmä 2.6. (Vert. [1, s. 16-17]) *Kripke-malli* on pari $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, jossa $\mathcal{F}$ on Kripke-kehys ja V on valuaatio eli kuvaus $\Phi \to \mathcal{P}(W)$. Kripke-malli on siis struktuuri $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, jossa W on epätyhjä maailmojen joukko ja $R \subseteq W \times W$.

Kun ϕ on jokin kaava, sen totuudelle ja epätotuudelle mallin $\mathcal{M}$ maailmassa w on olemassa omat merkintätapansa. Kun kaava ϕ on *tosi* mallin $\mathcal{M}$ maailmassa w, merkitään

$$\mathcal{M}, w \vDash \phi.$$

Kun taas kaava ϕ on *epätosi* mallin $\mathcal{M}$ maailmassa w, käytetään merkintää

$$\mathcal{M}, w \nvDash \phi.$$

Määritellään seuraavaksi modaalilogiikan kaavalle ϕ totuusehdot, joilla se on tosi mallin $\mathcal{M}$ maailmassa w.

Määritelmä 2.7. (Vert. [1, s. 17-18]) Olkoon Φ propositiosymboleiden joukko, ja olkoot ϕ ja ψ modaalilogiikan kaavoja. Olkoon lisäksi $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ Kripke-malli. Oletetaan, että $w \in W$. Tällöin kaava ϕ on tosi mallin $\mathcal{M}$ maailmassa w seuraavilla totuusehdoilla:

(i) $\mathcal{M}, w \vDash p \Leftrightarrow w \in V(p)$, missä p on propositiosymboli,

(ii) $\mathcal{M}, w \vDash \neg\phi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nvDash \phi$,

(iii) $\mathcal{M}, w \vDash \phi \vee \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \phi$ tai $\mathcal{M}, w \vDash \psi$ ja

(iv) $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\phi \Leftrightarrow \exists v \in W : (w, v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \vDash \phi$.

Muodostetaan vielä kaavojen $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ ja $\Box\phi$ totuusehdot seuraavassa lauseessa.

Lause 2.1. *Olkoot ϕ ja ψ modaalilogiikan kaavoja. Kaavojen $\phi \wedge \psi$, $\phi \to \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ ja $\Box\phi$ totuusehdot määräytyvät seuraavasti:*

(i) $\mathcal{M}, w \vDash \phi \wedge \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \phi$ *ja* $\mathcal{M}, w \vDash \psi$,

(ii) $\mathcal{M}, w \vDash \phi \to \psi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nvDash \phi$ *tai* $\mathcal{M}, w \vDash \psi$,

(iii) $\mathcal{M}, w \vDash \phi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow$ *joko* $\mathcal{M}, w \vDash \phi$ *ja* $\mathcal{M}, w \vDash \psi$ *tai* $\mathcal{M}, w \nvDash \phi$ *ja* $\mathcal{M}, w \nvDash \psi$ *ja*

(iv) $\mathcal{M}, w \vDash \Box\phi \Leftrightarrow \forall v \in W : ((w, v) \in R \Rightarrow \mathcal{M}, v \vDash \phi)$.

Todistus. Todistetaan jokainen kohta erikseen käyttäen määritelmiä 2.3 ja 2.7.

(i) Määritelmän 2.3 mukaan $\phi \wedge \psi = \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, w \vDash \phi \wedge \psi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nvDash \neg\phi \vee \neg\psi \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \phi \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, w \vDash \phi \\ &\text{(määritelmän 2.7 kohta (ii)).}\end{aligned}$$

(ii) Määritelmän 2.3 mukaan $\phi \to \psi = \neg\phi \vee \psi$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, w \vDash \phi \to \psi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \neg\phi \vee \psi \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nvDash \phi \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, w \vDash \psi \\ &\text{(määritelmän 2.7 kohta (iii)).}\end{aligned}$$

(iii) Määritelmän 2.3 mukaan $\phi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$, jolloin voidaan käyttää hyväksi edellisiä kohtia. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, w \vDash \phi \leftrightarrow \psi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \phi \to \psi \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, w \vDash \psi \to \phi \\ &\text{(lauseen 2.1 kohdan (i) perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \neg\phi \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, w \vDash \psi \\ &\text{ja} \quad \mathcal{M}, w \vDash \neg\psi \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, w \vDash \phi \\ &\text{(lauseen 2.1 kohdan (ii) perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \text{joko} \quad \mathcal{M}, w \vDash \phi \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, w \vDash \psi \\ &\text{tai} \quad \mathcal{M}, w \vDash \neg\phi \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, w \vDash \neg\psi.\end{aligned}$$

(iv) Käytetään todistuksessa välttämättömyysoperaattorin määritelmää $\Box\phi \overset{def}{=} \neg\Diamond\neg\phi$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{M}, w \vDash \Box\phi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \neg\Diamond\neg\phi \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nvDash \Diamond\neg\phi \\ &\text{(määritelmän 2.7 kohdan (ii) perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \neg(\exists v \in W : (w, v) \in R \wedge \mathcal{M}, v \vDash \neg\phi) \\ &\text{(määritelmän 2.7 kohdan (iv) perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \forall v \in W : \neg((w, v) \in R \wedge \mathcal{M}, v \vDash \neg\phi) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in W : ((w, v) \notin R \vee \mathcal{M}, v \nvDash \neg\phi) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in W : ((w, v) \notin R \vee \mathcal{M}, v \vDash \neg\neg\phi) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in W : ((w, v) \notin R \vee \mathcal{M}, v \vDash \phi) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in W : ((w, v) \in R \Rightarrow \mathcal{M}, v \vDash \phi).\end{aligned}$$

$\square$

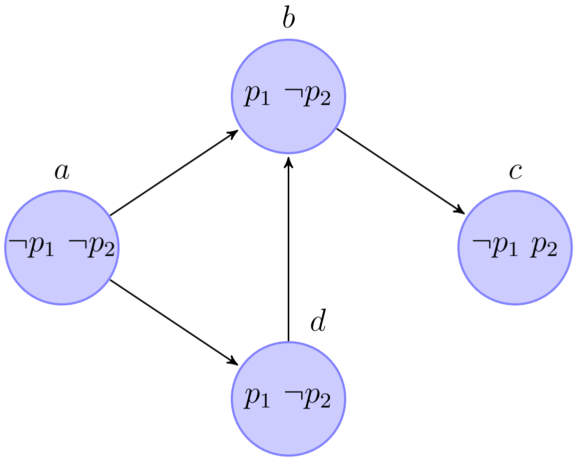
Jos maailma $w \in W$ on sellainen, josta ei pääse mihinkään maailmaan, niin tällöin pätee aina $\mathcal{M}, w \vDash \Box\phi$, missä ϕ on mikä tahansa modaalilogiikan kaava. Lisäksi tällaisessa maailmassa $w \in W$ pätee aina $\mathcal{M}, w \nvDash \Diamond\phi$.

Havainnollistetaan kaavojen totuuksia valitun mallin maailmoissa esimerkillä.

Esimerkki 2.4. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, jossa

$$W = \{a, b, c, d\}, \qquad R = \{(a, b), (a, d), (b, c), (d, b)\},$$
$$V(p_1) = \{b, d\} \quad \text{ja} \quad V(p_2) = \{c\}.$$

Olkoon lisäksi $\phi = \Box\Diamond p_1 \to \Diamond p_2$.



Kaavan ϕ totuusarvojen selvittämiseksi kussakin maailmassa on ensin selvitettävä sen alikaavojen totuusarvoja näissä maailmoissa. Tarkastellaan jokaista maailmaa erikseen.

- Koska maailmasta b pääsee vain maailmaan c ($(b, c) \in R$) ja $\mathcal{M}, c \nvDash p_1$, niin $\mathcal{M}, b \nvDash \Diamond p_1$. Tällöin koska $(a, b) \in R$ ja $\mathcal{M}, b \nvDash \Diamond p_1$, niin $\mathcal{M}, a \nvDash \Box\Diamond p_1$. Näin ollen $\mathcal{M}, a \vDash \Box\Diamond p_1 \to \Diamond p_2$ eli $\mathcal{M}, a \vDash \phi$.

- Koska maailmasta c ei pääse mihinkään maailmaan, niin $\mathcal{M}, c \nvDash \Diamond p_1$. Tällöin koska $(b, c) \in R$ ja $\mathcal{M}, c \nvDash \Diamond p_1$, niin $\mathcal{M}, b \nvDash \Box\Diamond p_1$. Näin ollen $\mathcal{M}, b \vDash \Box\Diamond p_1 \to \Diamond p_2$ eli $\mathcal{M}, b \vDash \phi$.

- Koska maailmasta c ei pääse mihinkään maailmaan, niin $\mathcal{M}, c \nvDash \Diamond p_2$ ja $\mathcal{M}, c \vDash \Box\Diamond p_1$. Näin ollen $\mathcal{M}, c \nvDash \Box\Diamond p_1 \to \Diamond p_2$ eli $\mathcal{M}, c \nvDash \phi$.

- Koska maailmasta b pääsee vain maailmaan c ($(b, c) \in R$) ja $\mathcal{M}, c \nvDash p_1$, niin $\mathcal{M}, b \nvDash \Diamond p_1$. Tällöin koska $(d, b) \in R$ ja $\mathcal{M}, b \nvDash \Diamond p_1$, niin $\mathcal{M}, d \nvDash \Box\Diamond p_1$. Näin ollen $\mathcal{M}, d \vDash \Box\Diamond p_1 \to \Diamond p_2$ eli $\mathcal{M}, d \vDash \phi$.

Modaalilogiikan kaavalle ϕ voidaan määritellä *totuusjoukko* tarkasteltavassa mallissa $\mathcal{M}$. Tämä joukko on niiden mallin $\mathcal{M}$ maailmojen joukko, joissa kaava ϕ on tosi. Määritellään tämä vielä täsmällisesti.

Määritelmä 2.8. (Vert. [3, s. 57]) Olkoon Φ propositiosymbolien joukko ja olkoon ϕ modaalilogiikan kaava. Olkoon lisäksi $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ Φ-malli. Kaavan ϕ *totuusjoukko* on joukko

$$\{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \phi\},$$

ja sitä merkitään notaatiolla $\|\phi\|^{\mathcal{M}}$.

Totuujoukot voidaan muotoilla myös rekursiivisesti seuraavan lauseen mukaisesti.

Lause 2.2. *Modaalilogiikan kaavan ϕ totuusjoukolle $\|\phi\|^{\mathcal{M}}$ pätee seuraavat ehdot:*

(i) $\|p\|^{\mathcal{M}} = V(p)$, *missä* $p \in \Phi$,

(ii) $\|\bot\|^{\mathcal{M}} = \emptyset$,

(iii) $\|\neg\phi\|^{\mathcal{M}} = W \backslash \|\phi\|^{\mathcal{M}}$,

(iv) $\|\phi \vee \psi\|^{\mathcal{M}} = \|\phi\|^{\mathcal{M}} \cup \|\phi\|^{\mathcal{M}}$,

(v) $\|\Diamond\phi\|^{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \exists v \in W : ((w, v) \in R \wedge v \in \|\phi\|^{\mathcal{M}})\}$.

Todistus. Olkoot ϕ ja ψ modaalilogiikan kaavoja, ja olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ Φ-malli. Jokaisen kohdan todistuksessa käytetään määritelmiä 2.7 ja 2.8.

(i) Olkoon $p \in \Phi$. Tällöin

$$\|p\|^{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash p\} = \{w \in W \mid w \in V(p)\} = V(p).$$

(ii) On selvää, että $\|\bot\|^{\mathcal{M}} = \emptyset$.

(iii) $\|\neg\phi\|^{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \neg\phi\} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \nvDash \phi\} = W \backslash \|\phi\|^{\mathcal{M}}$.

(iv) Todistetaan väite: $\|\phi \vee \psi\|^{\mathcal{M}} = \|\phi\|^{\mathcal{M}} \cup \|\phi\|^{\mathcal{M}}$.

$$\begin{aligned}
\|\phi \vee \psi\|^{\mathcal{M}} &= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \phi \vee \psi\} \\
&= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \phi \quad \text{tai} \quad \mathcal{M}, w \vDash \psi\} \\
&= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \phi\} \cup \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \psi\} \\
&= \|\phi\|^{\mathcal{M}} \cup \|\psi\|^{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

(v) Todistetaan väite: $\|\Diamond\phi\|^{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid \exists v \in W : ((w, v) \in R \wedge v \in \|\phi\|^{\mathcal{M}})\}$.

$$\begin{aligned}\|\Diamond\phi\|^{\mathcal{M}} &= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \vDash \Diamond\phi\} \\ &= \{w \in W \mid \exists v \in W : ((w, v) \in R \wedge \mathcal{M}, v \vDash \phi)\} \\ &= \{w \in W \mid \exists v \in W : ((w, v) \in R \wedge v \in \|\phi\|^{\mathcal{M}})\}.\end{aligned}$$

□

Edellä määriteltiin ehdot, joilla modaalilogiikan kaava ϕ on tosi annetun mallin $\mathcal{M}$ maailmassa w. Kaava ϕ voi myös olla tosi annetun mallin kaikissa maailmoissa, jolloin sen sanotaan olevan *validi* tässä mallissa. Määritellään tämä nyt täsmällisesti.

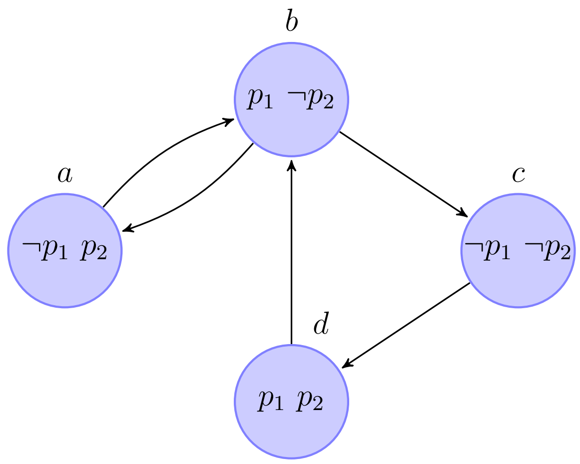
Määritelmä 2.9. (Vert. [3, s. 76]) Kaava ϕ on *validi mallissa* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, jos ja vain jos jokaisella $w \in W$ pätee $\mathcal{M}, w \vDash \phi$. Tällöin merkitään $\mathcal{M} \vDash \phi$.

Havainnollistetaan validisuutta mallissa vielä esimerkin avulla.

Esimerkki 2.5. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ Φ-malli, missä

$$W = \{a, b, c, d\}, \qquad R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, b)\},$$
$$V(p_1) = \{b, d\} \quad \text{ja} \quad V(p_2) = \{a, d\}.$$

Olkoon lisäksi $\psi = \Diamond(\Box p_1 \vee p_2) \to \Box\Diamond p_1$. Osoitetaan, että kaava ψ on validi mallissa $\mathcal{M}$.



Kaavan ψ totuusarvojen selvittämiseksi kussakin maailmassa on ensin selvitettävä sen alikaavojen totuusarvoja näissä maailmoissa. Tarkastellaan jokaista maailmaa erikseen.

- Maailmalle b pätee $\mathcal{M}, b \nvDash p_2$ sekä $\mathcal{M}, b \nvDash \Box p_1$, sillä $\mathcal{M}, c \nvDash p_1$ ja $(b, c) \in R$. Siis $\mathcal{M}, b \nvDash \Box p_1 \vee p_2$. Nyt koska maailmasta a pääsee vain maailmaan b ($(a, b) \in R$), niin $\mathcal{M}, a \nvDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2)$, eli $\mathcal{M}, a \vDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2) \to \Box\Diamond p_1$. Siis $\mathcal{M}, a \vDash \psi$.

- Koska $\mathcal{M}, d \vDash p_1$ ja maailmasta c pääsee vain maailmaan d ($(c,d) \in R$), niin $\mathcal{M}, c \vDash \Box p_1$ ja $\mathcal{M}, c \vDash \Diamond p_1$. Näin ollen $\mathcal{M}, c \vDash \Box p_1 \vee p_2$. Nyt koska $(b,c) \in R$, niin $\mathcal{M}, b \vDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2)$. Lisäksi koska $\mathcal{M}, b \vDash p_1$ ja $(a,b) \in R$, niin $\mathcal{M}, a \vDash \Diamond p_1$. Nyt koska maailmasta b pääsee vain maailmoihin a ja c sekä $\mathcal{M}, a \vDash \Diamond p_1$ ja $\mathcal{M}, c \vDash \Diamond p_1$, niin $\mathcal{M}, b \vDash \Box\Diamond p_1$. Näin ollen $\mathcal{M}, b \vDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2) \to \Box\Diamond p_1$. Eli $\mathcal{M}, b \vDash \psi$.

- Koska $\mathcal{M}, b \vDash p_1$ ja maailmasta d pääsee vain maailmaan b ($(d,b) \in R$), niin $\mathcal{M}, d \vDash \Box p_1$ ja $\mathcal{M}, d \vDash \Diamond p_1$. Nyt koska maailmasta c pääsee vain maailmaan d ($(c,d) \in R$), niin $\mathcal{M}, c \vDash \Box\Diamond p_1$. Lisäksi koska $\mathcal{M}, d \vDash \Box p_1$, niin $\mathcal{M}, d \vDash \Box p_1 \vee p_2$. Nyt koska $(c,d) \in R$ ja $\mathcal{M}, d \vDash \Box p_1 \vee p_2$, niin $\mathcal{M}, c \vDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2)$. Siis $\mathcal{M}, c \vDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2) \to \Box\Diamond p_1$, eli $\mathcal{M}, c \vDash \psi$.

- Koska $(b,c) \in R$ ja $\mathcal{M}, c \nvDash p_1$, niin $\mathcal{M}, b \nvDash \Box p_1$. Lisäksi koska $\mathcal{M}, b \nvDash p_2$, niin $\mathcal{M}, b \nvDash \Box p_1 \vee p_2$. Tällöin koska maailmasta d pääsee vain maailmaan b ($(d,b) \in R$) ja $\mathcal{M}, b \nvDash \Box p_1 \vee p_2$, niin $\mathcal{M}, d \nvDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2)$. Siis $\mathcal{M}, d \vDash \Diamond(\Box p_1 \vee p_2) \to \Box\Diamond p_1$, eli $\mathcal{M}, d \vDash \psi$.

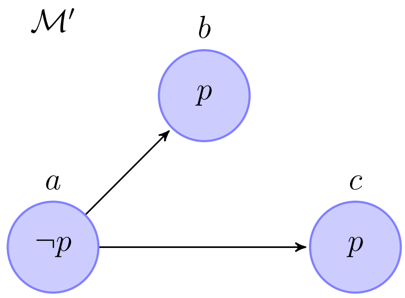
  Kaava ψ on siis tosi kaikissa mallin $\mathcal{M}$ maailmoissa a, b, c ja d, joten se on validi mallissa $\mathcal{M}$.

Kaava ϕ voi myös olla validi kehyksessä seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 2.10. (Vert.[1, s. 125]) Kaava ϕ on *validi kehyksessä* $\mathcal{F}$, jos ja vain jos jokaisella valuaatiolla $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ pätee $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \phi$. Tällöin merkitään $\mathcal{F} \vDash \phi$.

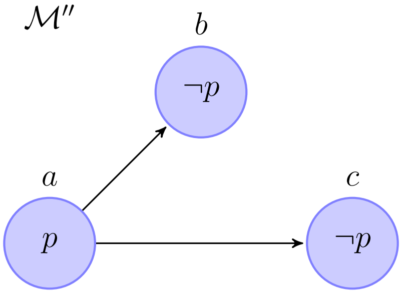
Havainnollistetaan validisuutta kehyksessä esimerkin avulla.

Esimerkki 2.6. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ Kripke-kehys, missä $W = \{a, b, c\}$ ja $R = \{(a,b), (a,c)\}$. Olkoon lisäksi $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}, V' \rangle$, missä $V'(p) = \{b, c\}$, $\mathcal{M}'' = \langle \mathcal{F}, V'' \rangle$, missä $V''(p) = \{a\}$, ja $\mathcal{M}''' = \langle \mathcal{F}, V''' \rangle$, missä $V'''(p) = \{b\}$. Tutkitaan, onko kaava $\phi = \Diamond p \to \Box p$ validi kehyksessä $\mathcal{F}$. Tarkastellaan jokaista mallia $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$ ja $\mathcal{M}'''$ erikseen.

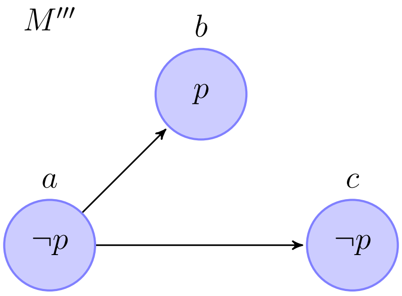


- Koska $(a,b) \in R$ ja $(a,c) \in R$ sekä $\mathcal{M}', b \vDash p$ ja $\mathcal{M}', c \vDash p$, niin $\mathcal{M}', a \vDash \Diamond p$ ja $\mathcal{M}', a \vDash \Box p$. Näin ollen $\mathcal{M}', a \vDash \Diamond p \to \Box p$. Siis $\mathcal{M}', a \vDash \phi$.

Lisäksi koska maailmoista b ja c ei pääse mihinkään maailmaan, niin $\mathcal{M}', b \nvDash \Diamond p$ ja $\mathcal{M}', c \nvDash \Diamond p$. Näin ollen $\mathcal{M}', b \vDash \Diamond p \to \Box p$ ja $\mathcal{M}', c \vDash \Diamond p \to \Box p$. Siis $\mathcal{M}', b \vDash \phi$ ja $\mathcal{M}', c \vDash \phi$. Näin ollen kaava ϕ on tosi kaikissa mallin $\mathcal{M}'$ maailmoissa a, b ja c, eli $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{F}, V' \rangle \vDash \phi$.



- Koska maailmoista b ja c ei pääse mihinkään maailmaan, niin $\mathcal{M}'', b \nvDash \Diamond p$ ja $\mathcal{M}'', c \nvDash \Diamond p$. Näin ollen $\mathcal{M}'', b \vDash \Diamond p \to \Box p$ ja $\mathcal{M}'', c \vDash \Diamond p \to \Box p$. Siis $\mathcal{M}'', b \vDash \phi$ ja $\mathcal{M}'', c \vDash \phi$. Lisäksi koska $\mathcal{M}'', b \nvDash p$ ja $\mathcal{M}'', c \nvDash p$ sekä maailmasta a pääsee vain maailmoihin b ja c ($(a, b) \in R$ ja $(a, c) \in R$), niin $\mathcal{M}'', a \nvDash \Diamond p$. Näin ollen $\mathcal{M}'', a \vDash \Diamond p \to \Box p$, eli $\mathcal{M}'', a \vDash \phi$. Siis kaava ϕ on tosi kaikissa mallin $\mathcal{M}''$ maailmoissa a, b ja c, joten $\mathcal{M}'' = \langle \mathcal{F}, V'' \rangle \vDash \phi$.



- Koska maailmoista b ja c ei pääse mihinkään maailmaan, niin $\mathcal{M}''', b \nvDash \Diamond p$ ja $\mathcal{M}''', c \nvDash \Diamond p$. Näin ollen $\mathcal{M}''', b \vDash \Diamond p \to \Box p$ ja $\mathcal{M}''', c \vDash \Diamond p \to \Box p$. Siis $\mathcal{M}''', b \vDash \phi$ ja $\mathcal{M}''', c \vDash \phi$. Koska maailmasta a pääsee maailmaan b ($(a, b) \in R$) ja $\mathcal{M}''', b \vDash p$, niin $\mathcal{M}''', a \vDash \Diamond p$. Mutta koska maailmasta a pääsee myös maailmaan c ($(a, c) \in R$) ja $\mathcal{M}''', c \nvDash p$, niin $\mathcal{M}''', a \nvDash \Box p$. Näin ollen $\mathcal{M}''', a \nvDash \Diamond p \to \Box p$, eli $\mathcal{M}''', a \nvDash \phi$. Kaava ϕ ei siis ole tosi kaikissa mallin $\mathcal{M}'''$ maailmoissa a, b ja c, joten $\mathcal{M}''' = \langle \mathcal{F}, V''' \rangle \nvDash \phi$.

Koska $\langle \mathcal{F}, V' \rangle \vDash \phi$ ja $\langle \mathcal{F}, V'' \rangle \vDash \phi$, mutta $\langle \mathcal{F}, V''' \rangle \nvDash \phi$, niin määritelmän 2.10 nojalla kaava ϕ ei ole validi kehyksessä $\mathcal{F}$.

Kaavan ϕ validisuus voidaan lisäksi määritellä myös Kripke-kehysten luokassa $\mathcal{K}$.

Määritelmä 2.11. (vert.[1, s. 125]) Modaalilogiikan kaava ϕ on validi *Kripke-kehysten luokassa* $\mathcal{K}$, jos ja vain jos se on validi jokaisessa kehysluokkaan $\mathcal{K}$ kuuluvassa kehyksessä $\mathcal{F}$. Tätä merkitään notaatiolla $\mathcal{K} \vDash \phi$.

Modaalilogiikan kaavalle voidaan tehdä *sijoitus* siten, että jokaisen siinä esiintyvän propositiosymbolin p paikalle sijoitetaan jokin toinen modaalilogiikan kaava ψ. Sijoitus voidaan yleistää tapaukseen, jossa tehdään useita sijoituksia yhtä aikaa. Esimerkiksi merkintä $\phi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k]$ tarkoittaa kaavaa, joka saadaan sijoittamalla jokaisen kaavassa ϕ esiintyvän propositiosymbolin p_i paikalle kaava ψ_i, missä $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sijoitus määritellään täsmällisesti rekursiivisesti.

Määritelmä 2.12. (Vert. [3, s. 168]) Olkoot $\psi_1, \ldots, \psi_k$ modaalilogiikan kaavoja, ja olkoon Φ propositiosymbolien joukko. Oletetaan, että $p_1, \ldots, p_k \in \Phi$. Modaalilogiikan kaavalle ϕ tehtävä sijoitus määritellään rekursiivisesti seuraavasti:

- Olkoon $\phi = q \in \Phi$. Tällöin

$$\phi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] = \begin{cases} \psi_i, & \text{jos } q = p_i \text{ jollakin } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ q, & \text{jos } q \neq p_i \text{ kaikilla } i \in \{1, \ldots, k\}. \end{cases}$$

- Olkoon $\phi = \neg\theta$. Tällöin

$$\phi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] = (\neg\theta)[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] = \neg(\theta[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k]).$$

- Olkoon $\phi = \theta \vee \delta$. Tällöin

$$\begin{aligned} \phi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] &= (\theta \vee \delta)[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] \\ &= \theta[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] \vee \delta[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k]. \end{aligned}$$

- Olkoon $\phi = \Diamond\theta$. Tällöin

$$\phi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] = (\Diamond\theta)[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k] = \Diamond(\theta[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k]).$$

Esitetään seuraavaksi lause, jonka mukaan kehyksessä validi modaalilogiikan kaava ϕ säilyttää validisuutensa, kun sille tehdään sijoitus.

Lause 2.3. *Olkoot ϕ ja $\psi_1, \ldots, \psi_k$ modaalilogiikan kaavoja, ja olkoon $\mathcal{F}$ kehys. Tällöin jos $\mathcal{F} \vDash \phi$, niin*

$$\mathcal{F} \vDash \phi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_k/p_k],$$

missä $p_1, \ldots, p_k$ ovat kaavassa ϕ esiintyviä propositiosymboleja.

Todistus. (Ks. [3, s. 173-175]) Koska lauseen todistus ei ole merkittävä tämän tutkielman kannalta, se sivuutetaan. $\square$

Tarkastellaan sijoitusta vielä esimerkin avulla.

Esimerkki 2.7. Olkoot $\phi = p \vee \Diamond q$ ja $\psi = q \rightarrow \Diamond p$. Muodostetaan kaavat $\phi[\psi/p]$ ja $\psi[\phi/q]$. Siis

$$\begin{aligned} \phi[\psi/p] &= (q \rightarrow \Diamond p) \vee \Diamond q \quad \text{ja} \\ \psi[\phi/q] &= (p \vee \Diamond q) \rightarrow \Diamond p. \end{aligned}$$

3 Korrespondenssiteoriaa

Tarkastellaan seuraavaksi vastaavuus- eli *korrespondenssiteoriaa*, joka on systemaattinen selvitys modaalilogiikan ja klassisen logiikan suhteista. Tätä teoriaa tarkastellaan kehystasolla. Ennen varsinaisen korrespondenssiteorian tarkastelua tutustutaan kuitenkin ensin standardikäännöksen käsitteeseen.

3.1 Standardikäännös

Standardikäännöksellä saadaan modaalilogiikan kaavasta predikaattilogiikan kaava. Sen avulla modaalilogiikan kaavat voidaan siis tulkita predikaattilogiikan kaavoina. Määritellään standardikäännös nyt täsmällisesti.

Määritelmä 3.1. (Vert. [1, s. 84-87]) Olkoon Φ propositiosymbolien joukko, ja olkoot x ja y predikaattilogiikan muuttujasymboleita siten, että $x \neq y$. Liitetään lisäksi jokaiseen propositiosymboliin $p \in \Phi$ yksipaikkainen relaatiosymboli P_p. Tällöin jokaisella modaalilogiikan kaavalla ϕ on olemassa *standardikäännökset* $ST_x(\phi)$ ja $ST_y(\phi)$, jotka on määritelty seuraavasti:

(i) $ST_x(p) = P_p(x)$, $\quad ST_y(p) = P_p(y)$, $\quad$ kun $p \in \Phi$.

(ii) $ST_x(\bot) = x \neq x$, $\quad ST_y(\bot) = y \neq y$.

(iii) $ST_x(\neg\phi) = \neg ST_x(\phi)$, $\quad ST_y(\neg\phi) = \neg ST_y(\phi)$.

(iv) $ST_x(\phi \vee \psi) = ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi)$, $\quad ST_y(\phi \vee \psi) = ST_y(\phi) \vee ST_y(\psi)$.

(v) $ST_x(\Diamond\phi) = \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(\phi))$, $\quad ST_y(\Diamond\phi) = \exists x(R(y,x) \wedge ST_x(\phi))$.

Muotoillaan vielä seuraavassa lauseessa standardikäännös modaalilogiikan kaavalle $\Box\phi$.

Lause 3.1. *Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava ja Φ propositiosymbolien joukko. Tällöin modaalilogiikan kaavan $\Box\phi$ standardikäännökset $ST_x(\Box\phi)$ ja $ST_y(\Box\phi)$ saadaan seuraavasti:*

$$ST_x(\Box\phi) \Leftrightarrow \forall y(R(x,y) \rightarrow ST_y(\phi)) \quad \textit{ja} \quad ST_y(\Box\phi) \Leftrightarrow \forall y(R(y,x) \rightarrow ST_x(\phi))$$

Todistus. Riittää osoittaa vain väite $ST_x(\Box\phi) \Leftrightarrow \forall y(R(x,y) \to ST_y(\phi))$, sillä väite $ST_y(\Box\phi) \Leftrightarrow \forall y(R(y,x) \to ST_x(\phi))$ osoitetaan vastaavasti. Todistuksessa käytetään määritelmää 3.1, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
ST_x(\Box\phi) &= ST_x(\neg\Diamond\neg\phi) \\
&\text{(välttämättömyysoperaattorin määritelmä)} \\
&= \neg ST_x(\Diamond\neg\phi) \\
&= \neg\exists y(R(x,y) \wedge ST_y(\neg\phi)) \\
&= \neg\exists y(R(x,y) \wedge \neg ST_y(\phi)) \\
&\Leftrightarrow \forall y\neg(R(x,y) \wedge \neg ST_y(\phi)) \\
&\Leftrightarrow \forall y(\neg R(x,y) \vee \neg\neg ST_y(\phi)) \\
&\Leftrightarrow \forall y(R(x,y) \to ST_y(\phi)).
\end{aligned}$$

□

Havainnollistetaan standardikäännöstä vielä esimerkin avulla.

Esimerkki 3.1. Olkoon kaava $\phi = \Diamond\Box p \to \Diamond q$, missä p ja $q \in \Phi$. Määritelmän 2.3 mukaan kaava ϕ voidaan esittää muodossa $\phi = \Diamond\Box p \to \Diamond q = \neg(\Diamond\Box p) \vee \Diamond q$. Määritetään kaavan ϕ standardikäännös $ST_x(\phi)$:

$$\begin{aligned}
ST_x(\phi) &= ST_x(\neg(\Diamond\Box p) \vee \Diamond q) \\
&= ST_x(\neg(\Diamond\Box p)) \vee ST_x(\Diamond q) \\
&\text{(määritelmän 3.1 kohdan (iv) perusteella)} \\
&= \neg ST_x(\Diamond\Box p) \vee ST_x(\Diamond q) \\
&\text{(määritelmän 3.1 kohdan (iii) perusteella)} \\
&= \neg(\exists y(R(x,y) \wedge ST_y(\Box p))) \vee \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(q)) \\
&\text{(määritelmän 3.1 kohdan (v) perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \neg\exists y(R(x,y) \wedge \forall x(R(y,x) \to ST_x(p))) \vee \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(q)) \\
&\text{(lauseen 3.1 perusteella)} \\
&= \neg\exists y(R(x,y) \wedge \forall x(R(y,x) \to P_p(x))) \vee \exists y(R(x,y) \wedge P_q(y)) \\
&\text{(määritelmän 3.1 kohdan (i) perusteella)} \\
&= \exists y(R(x,y) \wedge \forall x(R(y,x) \to P_p(x))) \to \exists y(R(x,y) \wedge P_q(y)).
\end{aligned}$$

Φ-malliin $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ liitetään myös sitä vastaava predikaattilogiikan malli $\mathcal{M}^* = \langle W, R^*, (P_p^*)_{p\in\Phi}\rangle$, missä $R^* = R$ ja $(P_p^*)_{p\in\Phi} = V(p)$ jokaisella $p \in \Phi$. Seuraavassa lauseessa esitetään modaalilogiikan kaavan ϕ validisuuden vastaavuus kaavan ϕ standardikäännökselle.

Lause 3.2. *Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava. Tällöin*

(i) kaikilla Φ-malleilla $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ ja kaikilla sen maailmoilla w pätee:

$$\mathcal{M}, w \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \vDash ST_x(\phi),$$

missä $\mathcal{M}^*$ on Φ-mallia $\mathcal{M}$ vastaava predikaattilogiikan malli ja s on tulkintafunktio siten, että $s(x) = w$, sekä

(ii) kaikilla Φ-malleilla $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ pätee:

$$\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}^* \models \forall x ST_x(\phi),$$

missä $\mathcal{M}^*$ on Φ-mallia $\mathcal{M}$ vastaava predikaattilogiikan malli.

Todistus. Todistetaan molemmat kohdat erikseen.

(i) Todistetaan väite induktiolla kaavan ϕ pituuden suhteen.

- Jos $\phi = p \in \Phi$, niin $ST_x(\phi) = P_p(x)$. Oletetaan lisäksi, että $s(x) = w$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \phi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models p \\ &\Leftrightarrow w \in V(p) \\ &\Leftrightarrow w \in P_p \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models P_p(x) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models ST_x(\phi) \end{aligned}$$

- Jos $\phi = \perp$, niin $ST_x(\phi) = x \neq x$. Oletetaan lisäksi, että $s(x) = w$. Tällöin selvästi $\mathcal{M}, w \not\models \phi$ ja $\mathcal{M}^*, s \not\models ST_x(\phi)$, eli $\mathcal{M}, w \models \neg\phi$ ja $\mathcal{M}^*, s \models \neg ST_x(\phi)$. Näin ollen $\mathcal{M}, w \models \neg\phi \Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models \neg ST_x(\phi)$
- Olkoon $\phi = \neg\psi$, ja oletetaan, että väite pätee kaavalle ψ. Oletetaan lisäksi, että $s(x) = w$. Nyt $ST_x(\phi) = \neg ST_x(\psi)$ ja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \phi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \neg\psi \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \not\models \psi \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \not\models ST_x(\psi) \quad \text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models \neg ST_x(\psi) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models ST_x(\neg\psi) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models ST_x(\phi) \end{aligned}$$

- Olkoon $\phi = \psi \vee \theta$, ja oletetaan, että väite pätee molemmille kaavoille ψ ja θ. Oletetaan lisäksi, että $s(x) = w$. Nyt $ST_x(\phi) = ST_x(\psi) \vee ST_x(\theta)$ ja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \phi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \psi \vee \theta \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \models \psi \vee \mathcal{M}, w \models \theta \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models ST_x(\psi) \vee \mathcal{M}^*, s \models ST_x(\theta) \\ &\text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models (ST_x(\psi) \vee ST_x(\theta)) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models ST_x(\psi \vee \theta) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \models ST_x(\phi). \end{aligned}$$

– Olkoon $\phi = \Diamond\psi$ ja oletetaan, että väite pätee kaavalla ψ. Oletetaan lisäksi, että $s(x) = w$.

Oletetaan ensin, että $\mathcal{M}, w \vDash \phi$ eli $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\psi$. Tällöin on olemassa $v \in W$ siten, että $(w, v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \vDash \psi$. Nyt induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M}^*, s' \vDash ST_y(\psi)$ aina, kun s' on sellainen tulkintafunktio, että $s'(y) = v$. Erityisesti siis $\mathcal{M}^*, s[v/y] \vDash ST_y(\psi)$. Lisäksi koska $(w, v) \in R$, niin $(w, v) \in R^*$, jolloin $\mathcal{M}^*, s[v/y] \vDash R(x, y)$. Näin ollen $\mathcal{M}^*, s[v/y] \vDash R(x, y) \wedge ST_y(\psi)$, joten $\mathcal{M}^*, s \vDash \exists y(R(x, y) \wedge ST_y(\psi))$. Siis $\mathcal{M}^*, s \vDash ST_x(\phi)$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{M}^*, s \vDash ST_x(\phi)$, eli $\mathcal{M}^*, s \vDash ST_x(\Diamond\psi)$. Tällöin on olemassa $v \in W$ siten , että $\mathcal{M}^*, s[v/y] \vDash R(x, y) \wedge ST_y(\psi)$. Nyt $\mathcal{M}^*, s[v/y] \vDash R(x, y)$, joten $(w, v) \in R^*$, ja edelleen $(w, v) \in R$. Lisäksi $\mathcal{M}^*, s[v/y] \vDash ST_y(\psi)$, joten induktio-oletuksen perusteella $\mathcal{M}, v \vDash \psi$. Nyt koska $\mathcal{M}, v \vDash \psi$ ja $(w, v) \in R$, niin $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\psi$, eli $\mathcal{M}, w \vDash \phi$.

Väite on siis todistettu.

(ii) Väite seuraa suoraan edellisestä kohdasta, sillä $\mathcal{M} \vDash \phi$, jos ja vain jos kaava ϕ on tosi jokaisessa mallin $\mathcal{M}$ maailmassa w. Eli kaikilla $w \in W$ pätee $\mathcal{M}, w \vDash \phi$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\mathcal{M}^* \vDash \forall x ST_x(\phi)$. Siis

$$\mathcal{M} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}^* \vDash \forall x ST_x(\phi).$$

□

Edellinen lause voidaan myös laajentaa koskemaan kehyksiä. Nimittäin modaalilogiikan kaavan ϕ validisuus kehyksessä $\mathcal{F}$ on yhtäpitävää sen kanssa, että tietty monadisen toisen kertaluvun kaava on tosi kehyksessä $\mathcal{F}$.

Lause 3.3. *Oletetaan, että $\Phi = \{p_1, \ldots, p_n\}$, ja olkoon ϕ modaalilogiikan kaava. Tällöin*

(i) kaikilla Kripke-kehyksillä $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ ja kaikilla sen maailmoilla w pätee:

$$\mathcal{F}, w \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi),$$

sekä

(ii) kaikilla Kripke-kehyksillä $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ pätee:

$$\mathcal{F} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(\phi).$$

Tässä yksipaikkaiset relaatiosymbolit P_i vastaavat kaavassa ϕ esiintyviä propositiosymboleja p_i $(i = 1, \ldots, n)$, ja yksinkertaisuuden vuoksi on merkitty $P_{p_i} = P_i$.

Todistus. (Vrt. [1, s. 135]) Olkoon $\mathcal{F}$ mielivaltainen kehys ja w tämän kehyksen mielivaltainen maailma. Oletetaan ensin, että $\mathcal{F}, w \vDash \phi$. Tällöin siis jokaisella valuaatiolla V pätee $\langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \phi$. Eli kaikilla kehykseen $\mathcal{F}$ liittyvillä malleilla $\mathcal{M}$ on voimassa $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \phi$. Nyt lauseen 3.2 perusteella saadaan

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{M}^*, s \vDash ST_x(\phi),$$

missä $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{F}, P_1, \ldots, P_n \rangle$ on mallia $\mathcal{M}$ vastaava predikaattilogiikan malli ja s on tulkintafunktio siten, että $s(x) = w$. Koska $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \phi$ jokaisella valuaatiolla V, niin tällöin kaikilla relaatioilla $P_1, \ldots, P_n$ pätee

$$\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{F}, P_1, \ldots, P_n \rangle, s \vDash ST_x(\phi).$$

Eli $\mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)$. Näin ollen on todistettu väite

$$\mathcal{F}, w \vDash \phi \Rightarrow \mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi).$$

Oletetaan sitten, että $\mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)$. Olkoon V mielivaltainen valuaatio, ja määritellään valuaatiosta V tulkinnat $P_1, \ldots, P_n$. Nyt koska $\mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi)$, niin millä tahansa mallilla $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{F}, P_1, \ldots, P_n \rangle$ pätee

$$\mathcal{M}^*, s \vDash ST_x(\phi).$$

Tällöin lauseen 3.2 perusteella saadaan

$$\mathcal{M}^*, s \vDash ST_x(\phi) \Leftrightarrow \mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \phi,$$

missä $\mathcal{M}^*$ on mallia $\mathcal{M}$ vastaava predikaattilogiikan malli ja s on tulkintafunktio siten, että $s(x) = w$. Koska $\mathcal{M}^* = \langle \mathcal{F}, P_1, \ldots, P_n \rangle, s \vDash ST_x(\phi)$ pätee millä tahansa mallilla $\mathcal{M}^*$ eli millä tahansa relaatioilla $P_1, \ldots, P_n$, niin

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle, w \vDash \phi$$

on voimassa kaikilla valuaatioilla V. Eli $\mathcal{F}, w \vDash \phi$. Näin ollen on todistettu väite

$$\mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi) \Rightarrow \mathcal{F}, w \vDash \phi.$$

Molempien kohtien perusteella väite (i) on todistettu.

Väite (ii) seuraa väitteestä (i). Nimittäin kun väitteestä (i) otetaan universaalikvanttori kehysten maailmojen yli, saadaan

$$\mathcal{F} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall x \forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\phi).$$

Nyt monadisen toisen kertaluvun logiikassa on yleisesti tunnettua se, että universaalikvanttorien paikkoja voidaan vaihtaa. Näin ollen saadaan väite (ii):

$$\mathcal{F} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(\phi).$$

$\square$

3.2 Korrespondenssiteoria ja kehysmääriteltävyys

Lähdetään nyt tarkastelemaan lähemmin vastaavuus- eli korrespondenssiteoriaa. Luvussa 2.2 määriteltiin modaalilogiikan kaavan ϕ validisuus kehyksessä (määritelmä 2.10). Tämä määritelmä on oleellinen tarkasteltaessa korrespondenssiteoriaa. Nimittäin korrespondenssiteoria perustuu määritelmään, jonka mukaan modaalilogiikan kaava ϕ vastaa predikaattilogiikan kaavaa, jos kaavan ϕ kehysvalidisuuden kanssa on yhtäpitävää jokin predikaattilogiikan kaava.

Luvussa 2.2 on tarkasteltu yksittäisen modaalilogiikan kaavan ϕ kehysvalidisuutta. Kehysvalidisuuden käsite voidaan laajentaa koskemaan myös modaalilogiikan kaavajoukkoa Γ. Lisäksi kaavajoukon Γ validisuus voidaan määritellä myös Kripke-kehysten luokassa $\mathcal{K}$. Määritellään nämä käsitteet nyt täsmällisesti.

Määritelmä 3.2. (Vrt. [1, s. 125]) Modaalilogiikan kaavajoukko Γ on *validi kehyksessä* $\mathcal{F}$, jos ja vain jos jokainen siihen kuuluva kaava on validi kehyksessä $\mathcal{F}$, eli jokaisella modaalilogiikan kaavalla $\phi \in \Gamma$ pätee: $\mathcal{F} \models \phi$. Tätä merkitään notaatiolla $\mathcal{F} \models \Gamma$.

Määritelmä 3.3. (Vrt. [1, s. 125]) Modaalilogiikan kaavajoukko Γ on *validi Kripke-kehysten luokassa* $\mathcal{K}$, jos ja vain jos se on validi jokaisessa kehysluokkaan $\mathcal{K}$ kuuluvassa kehyksessä $\mathcal{F}$. Tätä merkitään notaatiolla $\mathcal{K} \models \Gamma$.

Modaalilogiikan kaava ϕ voi määritellä Kripke-kehysten luokan. Tällöin puhutaan *kehysmääriteltävyydestä*, joka on lähtökohta korrespondenssiteorian tarkastelulle. Lisäksi kehysluokka voi yksittäisen modaalilogiikan kaavan sijasta olla määriteltävissä kaavajoukolla $\Gamma \subseteq ML(\Phi)$. Jos jokin kaava tai kaavajoukko määrittelee jonkin kehysluokan, niin sanotaan, että tämä kehysluokka on *modaalisesti määriteltävä*. Määritellään nämä käsitteet nyt täsmällisesti.

Määritelmä 3.4. (Vrt. [1, s. 125]) Olkoon $\mathcal{K}$ luokka Kripke-kehyksiä. Tällöin

(i) modaalilogiikan kaava ϕ *määrittelee* luokan $\mathcal{K}$, jos jokaisella kehyksellä $\mathcal{F}$ pätee:
$$\mathcal{F} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \phi,$$
ja

(ii) kaavajoukko $\Gamma \subseteq ML(\Phi)$ *määrittelee* luokan $\mathcal{K}$, jos jokaisella kehyksellä $\mathcal{F}$ pätee:
$$\mathcal{F} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \Gamma.$$

Määritelmä 3.5. (Vrt. [1, s. 125]) Kripke-kehysten luokka $\mathcal{K}$ on *modaalisesti määriteltävä*, jos on olemassa modaalilogiikan kaavajoukko Γ siten, että Γ määrittelee luokan $\mathcal{K}$.

Jokaista Kripke-kehysten luokkaa $\mathcal{K}$ vastaa jokin ominaisuus ja päinvastoin. Esimerkiksi refleksiivisyyttä vastaa refleksiivisten kehysten luokka ja irrefleksiivisyyttä vastaa irrefleksiivisten kehysten luokka. Kripke-kehys on refleksiivinen, jos ja vain jos se kuuluu kaikkien refleksiivisten kehysten luokkaan, ja irrefleksiivinen, jos ja vain jos se kuuluu kaikkien irrefleksiivisten kehysten luokkaan.

Jos Kripke-kehysten luokka on modaalisesti määriteltävissä, niin myös tätä kehysluokkaa vastaava ominaisuus on modaalisesti määriteltävissä. Nimittäin jos modaalilogiikan kaava ϕ tai kaavajoukko Γ määrittelee Kripke-kehysten luokan $\mathcal{K}$, niin tämä kaava tai kaavajoukko määrittelee myös tätä kehysluokkaa vastaavan ominaisuuden. Näin ollen voidaan sanoa, että modaalilogiikan kaava ϕ tai kaavajoukko Γ määrittelee esimerkiksi symmetrisyyden, jos se määrittelee symmetristen kehysten luokan. Tällöin symmetrisyys on modaalisesti määriteltävä.

Tarkastellaan seuraavaksi neljää eri kehysluokkaa, jotka ovat modaalisesti määriteltävissä. Tarkasteltavat kehysluokat ovat refleksiivisten, symmetristen, transitiivisten ja euklidisten kehysten luokat. Osoitetaan nyt, että näiden kehysten vaihtoehtorelaatioilla on nämä ominaisuudet, jos ja vain jos tietty modaalilogiikan kaava on validi kehysluokkaan kuuluvassa kehyksessä $\mathcal{F}$.

Lause 3.4. *Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ kehys ja $p \in \Phi$. Tällöin*

(i) $\mathcal{F} \vDash \Box p \to p \Leftrightarrow R$ *on refleksiivinen,*

(ii) $\mathcal{F} \vDash p \to \Box\Diamond p \Leftrightarrow R$ *on symmetrinen,*

(iii) $\mathcal{F} \vDash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \Leftrightarrow R$ *on transitiivinen,*

(iv) $\mathcal{F} \vDash \Diamond p \to \Box\Diamond p \Leftrightarrow R$ *on euklidinen.*

Todistus. Todistetaan jokainen kohta erikseen.

(i) Todistetaan suunta vasemmalta oikealla kontrapositiolla, eli oletetaan, että R ei ole refleksiivinen. On siis osoitettava, että $\mathcal{F} \nvDash \Box p \to p$. Koska R ei ole refleksiivinen, on olemassa sellainen maailma w, että $(w, w) \notin R$. Olkoon nyt $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ sellainen malli, että $V(p) = W\backslash\{w\}$. Siis $\mathcal{M}, w \nvDash p$ ja kaikilla muilla maailmoilla $v \in W$ pätee $\mathcal{M}, v \vDash p$. Tämä on siis voimassa myös jokaisella sellaisella $v \in W$, jolle pätee $(w, v) \in R$. Näin ollen $\mathcal{M}, w \vDash \Box p$. Oletetaan sitten, ettei ole olemassa sellaista $v \in W$, että $(w, v) \in R$. Tällöin maailmasta w ei päästä mihinkään maailmaan, joten $\mathcal{M}, w \vDash \Box p$. Näin ollen joka tapauksessa $\mathcal{M}, w \nvDash p$ ja $\mathcal{M}, w \vDash \Box p$, joten $\mathcal{M}, w \nvDash \Box p \to p$. Siis $\mathcal{F} \nvDash \Box p \to p$. Näin ollen on todistettu väite

$$\mathcal{F} \vDash \Box p \to p \Rightarrow R \quad \text{on refleksiivinen.}$$

Oletetaan sitten, että R on refleksiivinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, ja olkoon $w \in W$ mielivaltainen. Jos $\mathcal{M}, w \not\vDash \Box p$, niin väite pätee. Oletetaan siis, että $\mathcal{M}, w \vDash \Box p$. Nyt koska R on refleksiivinen, eli $(w, w) \in R$, niin välttämättä $\mathcal{M}, w \vDash p$. Siis $\mathcal{M}, w \vDash \Box p \to p$. Koska $w \in W$ oli mielivaltainen, tämä pätee jokaiselle mallin $\mathcal{M}$ maailmalle w. Lisäksi koska valuaatiofunktiolle ei tehty mitään oletuksia, niin jokaisella valuaatiolla $V : \Phi \to \mathcal{P}(w)$ pätee $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \Box p \to p$ eli $\mathcal{F} \vDash \Box p \to p$. Näin ollen on todistettu väite

$$R \quad \text{on refleksiivinen} \Rightarrow \mathcal{F} \vDash \Box p \to p.$$

Molempien kohtien perusteella väite on todistettu, eli $\mathcal{F} \vDash \Box p \to p \Leftrightarrow R$ on refleksiivinen.

(ii) Todistetaan suunta vasemmalta oikealle kontrapositiolla, eli oletetaan, että R ei ole symmetrinen. Tällöin on olemassa sellaiset maailmat w ja v, että $(w, v) \in R$ ja $(v, w) \notin R$. On siis osoitettava, että $\mathcal{F} \not\vDash p \to \Box\Diamond p$. Olkoon nyt $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ sellainen malli, että $V(p) = \{w\}$. Tällöin ei ole olemassa sellaista maailmaa u, että $(v, u) \in R$ ja $\mathcal{M}, u \vDash p$. Näin ollen $\mathcal{M}, v \not\vDash \Diamond p$. Nyt koska oletuksen perusteella $(w, v) \in R$, niin $\mathcal{M}, w \not\vDash \Box\Diamond p$, ja edelleen koska $\mathcal{M}, w \vDash p$, niin $\mathcal{M}, w \not\vDash p \to \Box\Diamond p$. Siis $\mathcal{F} \not\vDash p \to \Box\Diamond p$. Näin ollen on siis todistettu väite

$$\mathcal{F} \vDash p \to \Box\Diamond p \Rightarrow R \quad \text{on symmetrinen.}$$

Oletetaan sitten, että R on symmetrinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, ja olkoon $w \in W$ mielivaltainen. Jos $\mathcal{M}, w \not\vDash p$, niin väite pätee. Näin ollen oletetaan, että $\mathcal{M}, w \vDash p$. Nyt jos ei ole olemassa sellaista $v \in W$, että $(w, v) \in R$, niin triviaalisti $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Diamond p$. Oletetaan siis, että on olemassa sellainen $v \in W$, että $(w, v) \in R$. Nyt koska oletuksen perusteella R on symmetrinen, niin $(v, w) \in R$. Edelleen koska $(v, w) \in R$ ja $\mathcal{M}, w \vDash p$, niin $\mathcal{M}, v \vDash \Diamond p$. Näin ollen kaikilla $v \in W$, joilla $(w, v) \in R$ pätee $\mathcal{M}, v \vDash \Diamond p$, mistä seuraa edelleen, että $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Diamond p$. Siis $\mathcal{M}, w \vDash p \to \Box\Diamond p$. Koska $w \in W$ oli mielivaltainen, tämä pätee jokaiselle mallin $\mathcal{M}$ maailmalle w. Lisäksi koska valuaatiofunktiolle ei tehty mitään oletuksia, niin jokaisella valuaatiolla $V : \Phi \to \mathcal{P}(w)$ pätee $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash p \to \Box\Diamond p$ eli $\mathcal{F} \vDash p \to \Box\Diamond p$. Näin ollen on siis todistettu väite

$$R \quad \text{on symmetrinen} \Rightarrow \mathcal{F} \vDash p \to \Box\Diamond p.$$

Molempien kohtien perusteella väite on todistettu, eli $\mathcal{F} \vDash p \to \Box\Diamond p \Leftrightarrow R$ on symmetrinen.

(iii) Todistetaan suunta vasemmalta oikealla kontrapositiolla, eli oletetaan, että R ei ole transitiivinen. Tällöin on olemassa sellaiset maailmat w,

v ja u, että $(w,v) \in R$, $(v,u) \in R$ ja $(w,u) \notin R$. On siis osoitettava, että $\mathcal{F} \not\models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Olkoon nyt $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ sellainen malli, että $V(p) = \{u\}$. Nyt koska $\mathcal{M}, u \models p$ ja $(v,u) \in R$, niin $\mathcal{M}, v \models \Diamond p$. Edelleen koska $\mathcal{M}, v \models \Diamond p$ ja $(w,v) \in R$, niin $\mathcal{M}, w \models \Diamond\Diamond p$. Mutta koska $V(p) = \{u\}$ ja $(w,u) \notin R$, niin ei ole olemassa sellaista $w' \in W$, että $(w,w') \in R$ ja $\mathcal{M}, w' \models p$. Näin ollen $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p$. Nyt koska $\mathcal{M}, w \models \Diamond\Diamond p$ ja $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p$, niin $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Siis $\mathcal{F} \not\models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Näin ollen on siis todistettu väite

$$\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \Rightarrow R \quad \text{on transitiivinen.}$$

Oletetaan sitten, että R on transitiivinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, ja olkoon $w \in W$ mielivaltainen. Jos $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\Diamond p$, niin väite pätee. Oletetaan siis, että $\mathcal{M}, w \models \Diamond\Diamond p$. Tällöin on olemassa $v \in W$ siten, että $(w,v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \models \Diamond p$. Koska $\mathcal{M}, v \models \Diamond p$, niin on olemassa $u \in W$ siten, että $(v,u) \in R$ ja $\mathcal{M}, u \models p$. Nyt koska R on transitiivinen sekä $(w,v) \in R$ ja $(v,u) \in R$, niin $(w,u) \in R$. Edelleen koska $(w,u) \in R$ ja $\mathcal{M}, u \models p$, niin $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$. Siis $\mathcal{M}, w \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Koska $w \in W$ oli mielivaltainen, tämä pätee jokaiselle mallin $\mathcal{M}$ maailmalle w. Lisäksi koska valuaatiofunktiolle ei tehty mitään oletuksia, niin jokaisella valuaatiolla $V : \Phi \to \mathcal{P}(w)$ pätee $\langle \mathcal{F}, V\rangle \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ eli $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Näin ollen on siis todistettu väite

$$R \quad \text{on transitiivinen} \Rightarrow \mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p.$$

Molempien kohtien perusteella väite on todistettu, eli $\mathcal{F} \models \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \Leftrightarrow R$ on transitiivinen.

(iv) Todistetaan suunta vasemmalta oikealle kontrapositiolla, eli oletetaan, että R ei ole euklidinen. On siis osoitettava, että $\mathcal{F} \not\models \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Koska R ei ole euklidinen, on olemassa sellaiset maailmat w, v ja u, että $(w,v) \in R$, $(w,u) \in R$ ja $(v,u) \notin R$. Olkoon nyt $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ sellainen malli, että $V(p) = \{u\}$. Näin ollen koska $(w,u) \in R$ ja $\mathcal{M}, u \models p$, niin $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$. Mutta koska $(v,u) \notin R$ ja $V(p) = \{u\}$, niin ei ole olemassa sellaista u', että $(v,u') \in R$ ja $\mathcal{M}, u' \models p$, joten $\mathcal{M}, v \not\models \Diamond p$. Näin ollen koska $(w,v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \not\models \Diamond p$, niin $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond p$. Nyt koska $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$ ja $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond p$, niin $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Siis $\mathcal{F} \not\models \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Näin ollen on siis todistettu väite

$$\mathcal{F} \models \Diamond p \to \Box\Diamond p \Rightarrow R \quad \text{on euklidinen.}$$

Oletetaan sitten, että R on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, ja olkoon $w \in W$ mielivaltainen. Jos $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p$, niin väite pätee. Oletetaan siis, että $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$. Tällöin on olemassa sellainen $v \in W$, että $(w,v) \in R$ ja $\mathcal{M}, v \models p$. Olkoon lisäksi u sellainen mielivaltainen maailma, että $(w,u) \in R$. Koska R on euklidinen sekä $(w,v) \in R$

ja $(w, u) \in R$, niin $(u, v) \in R$ (ja $(v, u) \in R$). Nyt koska $\mathcal{M}, v \vDash p$ ja $(u, v) \in R$, niin $\mathcal{M}, u \vDash \Diamond p$. Koska maailma u oli mielivaltainen, niin tällöin kaikilla $u \in W$, joilla $(w, u) \in R$, pätee $\mathcal{M}, u \vDash \Diamond p$, joten $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Diamond p$. Siis $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$. Koska $w \in W$ oli mielivaltainen, tämä pätee jokaiselle mallin $\mathcal{M}$ maailmalle w. Lisäksi koska valuaatiofunktiolle ei tehty mitään oletuksia, niin jokaisella valuaatiolla $V : \Phi \rightarrow \mathcal{P}(w)$ pätee $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ eli $\mathcal{F} \vDash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$. Näin ollen on siis todistettu väite

$$R \quad \text{on euklidinen} \Rightarrow \mathcal{F} \vDash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p.$$

Molempien kohtien perusteella väite on todistettu, eli $\mathcal{F} \vDash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p \Leftrightarrow R$ on euklidinen.

$\square$

Tämän perusteella kaava $\Box p \rightarrow p$ määrittelee refleksiivisten kehysten luokan ja kaava $p \rightarrow \Box\Diamond p$ määrittelee symmetristen kehysten luokan. Lisäksi kaava $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ määrittelee transitiivisten kehysten luokan ja kaava $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ määrittelee euklidisten kehysten luokan.

Jotkut Kripke-kehysten luokat $\mathcal{K}$ voidaan määritellä myös predikaattilogiikan kaavalla. Korrespondenssiteoriassa tarkastellaankin sitä, milloin modaalisesti määriteltävä Kripke-kehysten luokka on määriteltävissä myös predikaattilogiikassa. Kaikki edelliset kehysluokat ovat määriteltävissä myös predikaattilogiikassa. On selvää, että predikaattilogiikan kaava $\forall x R(x, x)$ määrittelee refleksiivisisten kehysten luokan ja kaava $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ määrittelee symmetristen kehysten luokan. Lisäksi kaava $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ määrittelee transitiivisten kehysten luokan ja kaava $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow R(y, z))$ määrittelee euklidisten kehysten luokan.

Määritelmä 3.6. (Vrt. [1, s. 126]) Jos kehysten luokka voidaan määritellä modaalilogiikan kaavalla ϕ ja predikaattilogiikan kaavalla α, niin sanotaan, että kaavat ϕ ja α ovat toistensa kehyskorrespondentit.

Edellä esiteltyjä refleksiivisten, symmetristen, transitiivisten ja euklidisten kehysluokkien määritteleviä predikaattilogiikan kaavoja

- $\forall x R(x, x)$
- $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
- $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$
- $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow R(y, z))$

ei kuitenkaan saada suoraan standardikäännöksellä vastaavien kehysluokkien määrittelevistä modaalilogiikan kaavoista, vaikka molemmissa tapauksissa käsitellään ensimmäisen kertaluvun logiikkaa. Standardikäännöksen avulla esimerkiksi refleksiivisyyden määrittelevästä modaalilogiikan kaavasta on saatavissa vastaava toisen kertaluvun logiikan kaava. Itseasiassa jokainen modaalisesti määriteltävä kehysluokka on määriteltävissä myös monadisen toisen kertaluvun logiikassa. Mielenkiintoista onkin, milloin modaalisesti määriteltävä kehysluokka on määriteltävissä predikaattilogiikassa. Korrespondenssiteoriassa tarkastellaan riittäviä ehtoja sille, että modaalilogiikan kaavaa vastaa predikaatti- eli ensimmäisen kertaluvun logiikan kaava. Tähän liittyy syntaksiin perustuvia kriteerejä, joista tunnetuinta Henrik Sahlqvistin esittämää kriteeriä, *Sahlqvistin kaavoja*, tarkastellaan tässä tutkielmassa.

4 Sahlqvistin kaavat

Tässä luvussa tarkastellaan Sahlqvistin kaavoja. Ennen sitä on kuitenkin tutustuttava joihinkin käsitteisiin, jotka ovat oleellisia Sahlqvistin kaavojen tarkastelussa.

4.1 Positiivisuus ja negatiivisuus

Tutustutaan seuraavaksi positiivisuuden ja negatiivisuuden käsitteisiin, jotka ovat oleellisia Sahlqvistin kaavojen tarkastelussa. Modaalilogiikan kaavassa ϕ jokainen propositiosymbolin p esiintymä on joko positiivinen tai negatiivinen. Lisäksi itse kaavan ϕ voidaan sanoa olevan positiivinen tai negatiivinen, mutta on myös mahdollista, että se ei ole positiivinen eikä negatiivinen. Nämä käsitteet ovat myös pohjana myöhemmin tarkasteltavalle modaalilogiikan kaavan ϕ kasvamiselle ja vähenemiselle, joten määritellään ne nyt täsmällisesti.

Määritelmä 4.1. (Vrt. [1, s. 151]) Propositiosymbolin p esiintymä kaavassa ϕ on *positiivinen*, jos siihen vaikuttavien negaatioiden määrä on parillinen. Vastaavasti propositiosymbolin p esiintymä kaavassa ϕ on *negatiivinen*, jos siihen vaikuttavien negaatioiden määrä on pariton.

Määritelmä 4.2. (Vrt. [1, s. 152]) Modaalilogiikan kaava ϕ on *positiivinen propositiosymbolin p suhteen*, jos kaavassa ϕ kaikki propositiosymbolin p esiintymät ovat positiivisia. Vastaavasti modaalilogiikan kaava ϕ on *negatiivinen propositiosymbolin p suhteen*, jos kaavassa ϕ kaikki propositiosymbolin p esiintymät ovat negatiivisia. Lisäksi jos kaavassa ϕ ei esiinny lainkaan propositiosymbolia p, niin kaava ϕ on sekä positiivinen että negatiivinen propositiosymbolin p suhteen.

Määritelmä 4.3. (Vrt. [1, s. 152]) Modaalilogiikan kaava ϕ on *positiivinen*, jos se on positiivinen kaikkien siinä esiintyvien propositiosymbolien suhteen.

Vastaavasti modaalilogiikan kaava ϕ on *negatiivinen*, jos se on negatiivinen kaikkien siinä esiintyvien propositiosymbolien suhteen.

Tarkastellaan positiivisuuden ja negatiivisuuden käsitteitä vielä esimerkkien avulla.

Esimerkki 4.1. Olkoot p ja q propositiosymboleja. Tarkastellaan nyt kaavojen $\phi = \neg(p \vee \neg\neg p)$, $\psi = \Diamond(\neg\neg p \vee \Diamond q)$ ja $\theta = \Diamond(p \to p)$ positiivisuutta ja negatiivisuutta.

(i) Kaavassa ϕ propositiosymbolin p molempiin esiintymiin vaikuttavien negaatioiden määrä on pariton, joten molemmat propositiosymbolin p esiintymät ovat negatiivisia. Näin ollen kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Lisäksi koska kaavassa ϕ ei esiinny muita propositiosymboleita, niin se on negatiivinen kaikkien siinä esiintyvien propositiosymbolien suhteen. Näin ollen kaava ϕ on määritelmän 4.3 perusteella negatiivinen.

(ii) Kaavassa $\psi = \Diamond(\neg\neg p \vee \Diamond q)$ molempiin propositiosymboleihin p ja q vaikuttavien negaatioiden määrä on parillinen, joten kaava ψ on positiivinen molempien propositiosymbolien p ja q suhteen. Koska kaavassa ψ ei esiinny muita propositiosymboleita, se on positiivinen kaikkien siinä esiintyvien propositiosymbolien suhteen. Näin ollen kaava ψ on määritelmän 4.3 perusteella positiivinen.

(iii) Kaavan $\theta = \Diamond(p \to p)$ positiivisuuden tai negatiivisuuden tarkastelemiseksi se on ensin esitettävä konnektiivien $\neg$ ja $\vee$ avulla. Eli $\theta = \Diamond(p \to p) = \Diamond(\neg p \vee p)$. Nyt havaitaan, että kaavassa θ propositiosymbolin p ensimmäiseen esiintymään vaikuttavien negaatioiden määrä on parillinen ja toiseen pariton. Näin ollen kaava θ ei ole positiivinen eikä negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Sen sijaan koska kaavassa θ ei esiinny ollenkaan propositiosymbolia q, niin kaava θ on sekä positiivinen että negatiivinen propositiosymbolin q suhteen. Kaava θ ei siis ole positiivien eikä negatiivinen kaikkien siinä esiintyvien propositiosymbolien suhteen, joten määritelmän 4.3 perusteella se ei ole positiivinen eikä negatiivinen.

Vastaavat käsitteet voidaan määritellä myös toisen kertaluvun kaavalle ja siinä esiintyvälle predikaattisymbolille P. Esitetään vielä nämäkin määritelmät.

Määritelmä 4.4. Toisen kertaluvun kaavassa yksipaikkaisen predikaattisymbolin P esiintymä on *positiivinen*, jos siihen vaikuttavien negaatioiden määrä on parillinen. Vastaavasti toisen kertaluvun kaavassa yksipaikkaisen predikaattisymbolin P esiintymä on *negatiivinen*, jos siihen vaikuttavien negaatioiden määrä on pariton.

Määritelmä 4.5. Toisen kertaluvun kaava on *positiivinen predikaattisymbolin P suhteen*, jos kaavassa kaikki predikaattisymbolin P esiintymät ovat positiivisia. Toisen kertaluvun kaava on *negatiivinen predikaattisymbolin P suhteen*, jos kaavassa kaikki predikaattisymbolin P esiintymät ovat negatiivisia. Lisäksi jos kaavassa ei esiinny ollenkaan predikaattisymbolia P, niin se on sekä positiivinen että negatiivinen predikaattisymbolin P suhteen.

Määritelmä 4.6. Toisen kertaluvun kaava on *positiivinen*, jos se on positiivinen kaikkien siinä esiintyvien predikaattisymbolien suhteen. Vastaavasti toisen kertaluvun kaava on *negatiivinen*, jos se on negatiivinen kaikkien siinä esiintyvien predikaattisymbolien suhteen.

On ilmeistä, että jos modaalilogiikan kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin kaava $\neg\phi$ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Muotoillaan tämä ominaisuus vielä lauseeksi ja todistetaan se.

Lause 4.1. *Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava. Jos kaava ϕ on positiviinen propositiosybolin p suhteen (negatiivinen propositiosymbolin p suhteen), niin kaava $\neg\phi$ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen (positiivinen propositiosymbolin p suhteen).*

Todistus. Oletetaan, että kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Tällöin määritelmien 4.1 ja 4.2 perusteella jokaiseen kaavassa ϕ esiintyvään propositiosymboliin p vaikuttavien negaatioiden määrä on parillinen. Täten jokaiseen kaavassa $\neg\phi$ esiintyvään propositiosymboliin p vaikuttavien negaatioiden määrä on pariton, jolloin kaava $\neg\phi$ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Vastaavasti kun oletetetaan, että kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin määritelmien 4.1 ja 4.2 perusteella jokaiseen kaavassa ϕ esiintyvään propositiosymboliin p vaikuttavien negaatioiden määrä on pariton. Täten jokaiseen kaavassa $\neg\phi$ esiintyvään propositiosymboliin p vaikuttavien negaatioiden määrä on parillinen, jolloin kaava $\neg\phi$ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen. □

Jotta voidaan lähteä tarkastelemaan modaalilogiikan kaavan ϕ kasvamista ja vähenemistä, on tutustuttava seuraavaan lauseeseen, jossa esitetään yhteys kaavan ϕ positiivisuuden propositiosymbolin p suhteen ja kaavan ϕ standardikäännöksen $ST_x(\phi)$ positiivisuuden predikaattisymbolin P suhteen välillä.

Lause 4.2. *Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava. Kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, jos ja vain jos kaavan ϕ standardikäännös $ST_x(\phi)$ on propositiosymbolia p vastaavalla predikaattisymbolilla P positiivinen predikaattisymbolin P suhteen.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla kaavan ϕ pituuden suhteen.

- Olkoon $\phi = p \in \Phi$. Tällöin ϕ on selvästi positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Nyt määritelmän 3.1 kohdan (i) perusteella $ST_x(\phi) = ST_x(p) = P_p(x)$, joka on selvästi positiivinen predikaattisymbolin P suhteen.

- Olkoon $\phi = \neg\psi$. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee kaavalle ψ. Oletetaan lisäksi, että kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin kaava ψ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Nyt määritelmän 3.1 kohdan (iii) perusteella saadaan $ST_x(\phi) = ST_x(\neg\psi) = \neg ST_x(\psi)$. Nyt koska kaava ψ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin induktio-oletuksen perusteella kaava $ST_x(\psi)$ on negatiivinen predikaattisymbolin P suhteen. Tällöin kaava $\neg ST_x(\psi)$ on positiivinen predikaattisymbolin P suhteen ja väite pätee.

- Olkoon $\phi = \psi \vee \theta$. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee kaavoille ψ ja θ. Oletetaan lisäksi, että kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Tällöin myös kaavojen ψ ja θ on oltava positiivisia propositiosymbolin p suhteen. Nyt määritelmän 3.1 kohdan (iv) perusteella saadaan

  $$ST_x(\phi) = ST_x(\psi \vee \theta) = ST_x(\psi) \vee ST_x(\theta).$$

  Koska kaavat ψ ja θ ovat positiivisia propositiosymbolin p suhteen, niin induktio-oletuksen perusteella kaavat $ST_x(\psi)$ ja $ST_x(\theta)$ ovat positiivisia predikaattisymbolin P suhteen. Näin ollen kaava $ST_x(\psi) \vee ST_x(\theta)$ on positiivinen predikaattisymbolin P suhteen, eli kaava $ST_x(\phi)$ on positiivinen predikaattisymbolin P suhteen, joten väite pätee.

- Olkoon $\phi = \Diamond\psi$. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee kaavalle ψ. Oletetaan lisäksi, että kaava ϕ on positiiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin myös kaavan ψ on oltava positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Nyt määritelmän 3.1 kohdan (v) perusteella saadaan

  $$ST_x(\phi) = ST_x(\Diamond\psi) = \exists y(R(x, y) \wedge ST_y(\psi)).$$

  Nyt koska kaava ψ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin induktio-oletuksen perusteella kaava $ST_y(\psi)$ on positiivinen predikaattisymbolin P suhteen. Näin ollen kaava $ST_x(\phi) = ST_x(\Diamond\psi)$ on positiivinen predikaattisymbolin P suhteen, joten väite pätee.

$\square$

4.2 Kasvaminen ja väheneminen

Nyt on mahdollista määritellä modaalilogiikan kaavan ϕ kasvaminen ja väheneminen propositiosymbolin p suhteen. Lisäksi todistetaan lause, jonka mukaan kaava ϕ on kasvava propositiosymbolin p suhteen, jos kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, ja vähenevä propositiosymbolin p suhteen, jos kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen.

Määritelmä 4.7. (Vrt. [1, s. 152]) Modaalilogiikan kaava ϕ on *kasvava propositiosymbolin p suhteen*, jos kaava ϕ säilyttää totuutensa propositiosymbolin p tulkintaa laajennettaessa. Toisin muotoiltuna olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ malli. Olkoon lisäksi V' sellainen valuaatio, että $V(p) \subseteq V'(p)$ ja jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ on voimassa $V(q) = V'(q)$. Kaava ϕ on kasvava propositiosymbolin p suhteen, jos jokaisella edellä määritellyllä mallilla $\mathcal{M}$, jokaisella sen maailmalla $w \in W$ sekä jokaisella edellä määritellyllä valuaatiolla V' pätee

$$\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi \Rightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.$$

Määritelmä 4.8. (Vrt. [1, s. 152]) Modaalilogiikan kaava ϕ on *vähenevä propositiosymbolin p suhteen*, jos kaava ϕ säilyttää totuutensa propositiosymbolin p tulkintaa supistettaessa. Toisin muotoiltuna olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ malli. Olkoon lisäksi V' sellainen valuaatio, että $V'(p) \subseteq V(p)$ ja jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ on voimassa $V(q) = V'(q)$. Kaava ϕ on vähenevä propositiosymbolin p suhteen, jos jokaisella edellä määritellyllä mallilla $\mathcal{M}$, jokaisella sen maailmalla $w \in W$ sekä jokaisella edellä määritellyllä valuaatiolla V' pätee

$$\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi \Rightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.$$

Vastaavasti voitaisiin määritellä toisen kertaluvun kaavan kasvaminen ja väheneminen.

Lause 4.3. *Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava.*

(i) Jos kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin se on kasvava propositiosymbolin p suhteen.

(ii) Jos kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin se on vähenevä propositiosymbolin p suhteen.

Todistus. Todistetaan väitteet induktiolla kaavan ϕ pituuden suhteen. Väitteet todistetaan samanaikaisesti.

- Olkoon $\phi = p \in \Phi$. Tällöin kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V(p) \subseteq V'(p)$. Nyt

$$\begin{aligned}\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash p\\ &\Leftrightarrow w \in V(p)\\ &\Rightarrow w \in V'(p)\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash p\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.\end{aligned}$$

- Olkoon $\phi = \neg p$. Tällöin kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V'(p) \subseteq V(p)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \neg p \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \nvDash p \\
&\Leftrightarrow w \notin V(p) \\
&\Rightarrow w \notin V'(p) \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \nvDash p \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \neg p \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.
\end{aligned}$$

- Olkoon $\phi = \neg\psi$.

  (i) Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V(p) \subseteq V'(p)$. Lisäksi oletetaan, että jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ pätee $V(q) = V'(q)$. Olkoon kaava ϕ nyt positiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin kaava ψ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite (ii) pätee kaavalle ψ. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \neg\psi \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \nvDash \psi \\
&\Rightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \nvDash \psi \\
&\text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \neg\psi \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.
\end{aligned}$$

  (ii) Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V'(p) \subseteq V(p)$. Lisäksi oletetaan, että jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ pätee $V(q) = V'(q)$. Olkoon kaava ϕ nyt negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin kaava ψ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite (i) pätee kaavalle ψ. Nyt

$$\begin{aligned}
\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \neg\psi \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \nvDash \psi \\
&\Rightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \nvDash \psi \\
&\text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \neg\psi \\
&\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.
\end{aligned}$$

- Olkoon $\phi = \psi \vee \theta$.

  (i) Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V(p) \subseteq V'(p)$. Lisäksi oletetaan, että jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ pätee $V(q) = V'(q)$. Olkoon kaava ϕ nyt positiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin myös kaavojen ψ ja θ on oltava positiivisia propositiosymbolin p suhteen. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee kaavoille ψ ja θ. Nyt

  $$\begin{aligned}\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \psi \vee \theta\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \psi \quad \text{tai} \quad \langle W, R, V\rangle, w \vDash \theta\\ &\Rightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \psi \quad \text{tai} \quad \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \theta\\ &\text{(induktio-oletuksen perusteella)}\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \psi \vee \theta\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.\end{aligned}$$

  (ii) Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V'(p) \subseteq V(p)$. Lisäksi oletetaan, että jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ pätee $V(q) = V'(q)$. Olkoon kaava ϕ nyt negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin myös kaavojen ψ ja θ on oltava negatiivisia propositiosymbolin p suhteen. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee kaavoille ψ ja θ. Nyt

  $$\begin{aligned}\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \psi \vee \theta\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \psi \quad \text{tai} \quad \langle W, R, V\rangle, w \vDash \theta\\ &\Rightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \psi \quad \text{tai} \quad \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \theta\\ &\text{(induktio-oletuksen perusteella)}\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \psi \vee \theta\\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.\end{aligned}$$

- Olkoon $\phi = \Diamond\psi$.

  (i) Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V(p) \subseteq V'(p)$. Lisäksi oletetaan, että jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ pätee $V(q) = V'(q)$. Olkoon nyt kaava ϕ positiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin myös kaava ψ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee kaavalle ψ. Nyt

$$\begin{aligned}\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \Diamond\psi \\ &\Leftrightarrow \exists v \in W : ((w, v) \in R \quad \text{ja} \quad \langle W, R, V\rangle, v \vDash \psi) \\ &\Rightarrow \exists v \in W : ((w, v) \in R \quad \text{ja} \quad \langle W, R, V'\rangle, v \vDash \psi) \\ &\text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \Diamond\psi \\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.\end{aligned}$$

(ii) Olkoon $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ mielivaltainen malli, ja olkoon V' sellainen valuaatio, että $V'(p) \subseteq V(p)$. Lisäksi oletetaan, että jokaisella propositiosymbolilla $q \neq p$ pätee $V(q) = V'(q)$. Olkoon nyt kaava ϕ negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, jolloin myös kaava ψ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Induktio-oletuksena oletetaan, että väite pätee kaavalle ψ. Nyt

$$\begin{aligned}\langle W, R, V\rangle, w \vDash \phi &\Leftrightarrow \langle W, R, V\rangle, w \vDash \Diamond\psi \\ &\Leftrightarrow \exists v \in W : ((w, v) \in R \quad \text{ja} \quad \langle W, R, V\rangle, v \vDash \psi) \\ &\Rightarrow \exists v \in W : ((w, v) \in R \quad \text{ja} \quad \langle W, R, V'\rangle, v \vDash \psi) \\ &\text{(induktio-oletuksen perusteella)} \\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \Diamond\psi \\ &\Leftrightarrow \langle W, R, V'\rangle, w \vDash \phi.\end{aligned}$$

□

Seuraavassa esimerkissä osoitetaan, että tietyllä modaalilogiikan kaavalla on predikaattilogiikassa korrespondentti. Todistuksessa hyödynnetään modaalilogiikan kaavan kasvamista.

Esimerkki 4.2. (Vrt. [1, s. 153]) Osoitetaan, että modaalilogiikan kaavalla $\Diamond\Box p$ on predikaattilogiikassa korrespondentti. Olkoon $\mathcal{F} = \langle W, R\rangle$ kehys, ja oletetaan ensin, että $\mathcal{F} \vDash \Diamond\Box p$. Tällöin kaava $\Diamond\Box p$ on tosi kehyksen $\mathcal{F}$ jokaisessa maailmassa w ja jokaisella valuaatiolla V. Tarkastellaan nyt minimaalista valuaatiota V_m, jolle on voimassa $V_m(p) = \emptyset$. Nyt koska kaava $\Diamond\Box p$ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$, niin mielivaltaiselle maailmalle $w \in W$ pätee $\langle \mathcal{F}, V_m\rangle, w \vDash \Diamond\Box p$. Tällöin on oltava sellainen maailma v, että $(w, v) \in R$ ja $\langle \mathcal{F}, V_m\rangle, v \vDash \Box p$. Nyt koska $V_m(p) = \emptyset$, niin maailmasta v ei voi päästä mihinkään maailmaan. Näin ollen koska maailma w oli mielivaltainen, niin

$$\mathcal{M}^* \vDash \forall x(\exists y((x, y) \in R \wedge \neg\exists z((y, z) \in R))),$$

missä $\mathcal{M}^*$ on mallia $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V_m\rangle$ vastaava predikaattilogiikan malli. Koska $\mathcal{F} \vDash \Diamond\Box p$ eli kaava $\Diamond\Box p$ on tosi jokaisella valuaatiolla V, niin

$$\mathcal{F} \vDash \forall x(\exists y((x, y) \in R \wedge \neg\exists z((y, z) \in R))).$$

Näin ollen on osoitettu, että

$$\mathcal{F} \vDash \Diamond\Box p \Rightarrow \mathcal{F} \vDash \forall x(\exists y((x,y) \in R \land \neg\exists z((y,z) \in R))).$$

Toisen suunnan osoittamiseksi oletetaan, että mielivaltaisesta maailmasta w pääsee sellaiseen maailmaan v, josta ei pääse mihinkään maailmaan. Osoitetaan, että kaava $\Diamond\Box p$ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$. Olkoon valuaatio V mielivaltainen, ja määritellään valuaatio V_m siten, että $V_m(p) = \emptyset$. Nyt koska $\langle\mathcal{F}, V_m\rangle, v \vDash \Box p$ ja $(w,v) \in R$, niin $\langle\mathcal{F}, V_m\rangle, w \vDash \Diamond\Box p$. Koska kaava $\Diamond\Box p$ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin lauseen 4.3 perusteella se on kasvava propositiosymbolin p suhteen. Lisäksi koska $V_m(p) = \emptyset$, niin $V_m(p) \subseteq V(p)$. Näin ollen koska $\langle\mathcal{F}, V_m\rangle, w \vDash \Diamond\Box p$, niin määritelmän 4.7 perusteella $\langle\mathcal{F}, V\rangle, w \vDash \Diamond\Box p$. Koska maailma w oli mielivaltainen, niin jokaisella maailmalla w pätee $\langle\mathcal{F}, V\rangle, w \vDash \Diamond\Box p$, eli $\langle\mathcal{F}, V\rangle \vDash \Diamond\Box p$. Lisäksi koska valuaatio V oli mielivaltainen, niin jokaisella valuaatiolla V pätee $\langle\mathcal{F}, V\rangle \vDash \Diamond\Box p$ eli $\mathcal{F} \vDash \Diamond\Box p$. Näin ollen on osoitettu, että

$$\mathcal{F} \vDash \forall x(\exists y((x,y) \in R \land \neg\exists z((y,z) \in R))) \Rightarrow \mathcal{F} \vDash \Diamond\Box p.$$

Molempien kohtien nojalla on siis osoitettu, että modaalilogiikan kaavan $\Diamond\Box p$ validisuus kehyksessä $\mathcal{F}$ on yhtäpitävää predikaattilogiikan kaavan

$$\forall x(\exists y((x,y) \in R \land \neg\exists z((y,z) \in R)))$$

kanssa. Näin ollen modaalilogiikan kaavalla $\Diamond\Box p$ on predikaattilogiikassa korrespondentti.

Huomautus 4.1. Edellisen esimerkin kaava $\Diamond\Box\phi$ ei itseasiassa ole validi missään kehyksessä $\mathcal{F}$. Tämä havaitaan helposti, kun tarkastellaan mielivaltaista kehystä $\mathcal{F}$ sekä esimerkin valuaatiota $V_m(p) = \emptyset$. Nyt jotta kaava $\Diamond\Box p$ on tosi kehyksen $\mathcal{F}$ mielivaltaisessa maailmassa w, niin maailmasta w on päästävä maailmaan v, jossa kaava $\Box p$ on tosi. Nyt koska $V_m(p) = \emptyset$, niin maailmasta v ei voi päästä mihinkään. Tästä seuraa, että kaava $\Diamond\Box p$ ei ole tosi maailmassa v. Näin ollen kaava $\Diamond\Box p$ ei ole validi mallissa $\langle\mathcal{F}, V_m\rangle$, mistä seuraa edelleen, että se ei ole validi kehyksessä $\mathcal{F}$. Koska kehykselle $\mathcal{F}$ ei tehty mitään oletuksia, tämä pätee kaikilla kehyksille, eli kaava $\Diamond\Box p$ ei ole validi missään kehyksessä $\mathcal{F}$. Toisaalta esimerkin menetelmä antaa myös predikaattilogiikan lauseen, joka ei ole validi missään kehyksessä.

4.3 Uniformiset ja suljetut kaavat

Seuraavaksi tutustutaan kahteen eri kaavajoukkoon, *uniformisiin* ja *suljettuihin kaavoihin*. Lähestytään aihetta ensin havainnollistavan esimerkin avulla.

Esimerkki 4.3. (Vrt. [1, s. 150-151]) Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava. Tehdään kaavalle ϕ sijoitus siten, että jokainen siinä esiintyvä propositiosymboli

$p_1, \ldots, p_n \in \Phi$ korvataan vakiolla $\top$, ja merkitään tätä kaavaa notaatiolla ψ. Siis

$$\psi = \phi[\top/p_1, \ldots, \top/p_n].$$

Muodostetussa kaavassa ψ ei siis esiinny ollenkaan propositiosymboleja. Osoitetaan nyt, että kaavalla ψ on predikaattilogiikassa korrespondentti. Lauseen 3.3 kohdan (ii) perusteella

$$\mathcal{F} \vDash \psi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(\psi),$$

missä predikaattisymbolit $P_1, \ldots, P_n$ vastaavat kaavassa ψ esiintyviä propositiosymboleja $p_1, \ldots, p_n$. Mutta edellä tehdyn sijoituksen perusteella kaavassa ψ ei esiinny ollenkaan propositiosymboleja, jolloin myöskään kaavassa $ST_x(\psi)$ ei voi esiintyä yhtään predikaattisymbolia. Näin ollen saadaan

$$\mathcal{F} \vDash \psi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall x ST_x(\psi),$$

joten kaavalla ψ on predikaattilogiikassa korrespondentti.

Esimerkin tulos on laajennettavissa koskemaan kaikkia sellaisia kaavoja, jotka eivät sisällä propositiosymboleja. Tällaisia kaavoja kutsutaan suljetuiksi kaavoiksi. Suljetulla kaavalla on aina predikaattilogiikassa korrespondentti. Muotoillaan tämä lauseeksi ja todistetaan se, mutta ennen sitä määritellään suljettu kaava täsmällisesti.

Määritelmä 4.9. (Vrt. [1, s. 151]) Modaalilogiikan kaava ϕ on *suljettu*, jos ja vain jos se ei sisällä propositiosymboleja. Suljetussa kaavassa esiintyy siis konnektiivien, $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$, sekä mahdollisuus- ja välttämättömyysoperaattorien, $\Diamond$ ja $\Box$, lisäksi vain vakioita, $\top$ ja $\bot$.

Lause 4.4. *Olkoon ϕ suljettu kaava. Tällöin kaavaa ϕ vastaa predikaattilogiikan lause $c_\phi(x)$.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 151]) Kaava ϕ on suljettu eli se ei sisällä yhtään propositiosymbolia. Tällöin lauseen 3.3 perusteella saadaan

$$\mathcal{F} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall x ST_x(\phi),$$

Näin ollen on siis osoitettu, että suljettua modaalilogiikan kaavaa ϕ vastaa predikaattilogiikan lause. $\Box$

Lähdetään seuraavaksi tarkastelemaan uniformisia kaavoja. Uniformiset kaavat ovat myös sellaisia kaavoja, joilla on aina predikaattilogiikassa korrespondentti. Modaalilogiikan kaavan uniformisuuteen liittyy propositiosymbolien esiintymien positiivisuus ja negatiivisuus. Määritellään nyt uniformINEN kaava täsmällisesti.

Määritelmä 4.10. (Vrt. [1, s. 153]) Modaalilogiikan kaava ϕ on *uniforminen*, jos kaikilla siinä esiintyvillä propositiosymboleilla p pätee, että kaava ϕ on joko positiivinen tai negatiivinen propositiosymbolin p suhteen.

Samanlainen määritelmä saadaan myös toisen kertaluvun kaavalle.

Määritelmä 4.11. (Vrt. [1, s. 153]) Toisen kertaluvun kaava on *uniforminen*, jos kaikilla siinä esiintyvillä predikaattisymboleilla P pätee, että kaava on joko positiivinen tai negatiivinen predikaattisymbolin P suhteen.

Muotoillaan ja todistetaan seuraavaksi lause, jonka mukaan uniformisilla modaalilogiikan kaavoilla on aina predikaattilogiikassa korrespondentti. Ennen sitä on kuitenkin tarkasteltava lauseen todistuksessa tarvittavaa apulausetta.

Lause 4.5. *Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava.*

(i) Jos kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin jokaisessa kehyksessä $\mathcal{F}$ pätee:

$$\mathcal{F} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \phi[\bot/p].$$

(ii) Jos kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin jokaisessa kehyksessä $\mathcal{F}$ pätee:

$$\mathcal{F} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \phi[\top/p].$$

Todistus. Todistetaan molemmat väitteet erikseen.

(i) Oletetaan, että kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen. Todistetaan ensin implikaatio vasemmalta oikealle, eli oletetaan, että $\mathcal{F} \vDash \phi$. Koska kaava ϕ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$, niin se on lauseen 2.3 perusteella tosi kehyksessä $\mathcal{F}$ erityisesti silloin, kun kaavassa ϕ esiintyvien propositiosymbolien p paikalle sijoitetaan falsum $\bot$. Siis $\mathcal{F} \vDash \phi[\bot/p]$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{F} \vDash \phi[\bot/p]$. On siis osoitettava, että kaava ϕ on tosi jokaisella valuaatiolla V. Olkoon V mielivaltainen valuaatio, ja määritellään valuaatio V' siten, että $V'(p) = \emptyset$. Nyt koska $\mathcal{F} \vDash \phi[\bot/p]$ ja $\|\bot\| = \emptyset$, niin

$$\langle \mathcal{F}, V' \rangle \vDash \phi.$$

Koska kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin lauseen 4.3 perusteella se on kasvava propositiosymbolin p suhteen. Lisäksi koska $V'(p) = \emptyset$, niin $V'(p) \subseteq V(p)$. Näin ollen koska $\langle \mathcal{F}, V' \rangle \vDash \phi$, niin määritelmän 4.7 perusteella $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \phi$. Nyt koska valuaatio V oli mielivaltainen, niin jokaisella valuaatiolla V pätee $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \phi$. Eli $\mathcal{F} \vDash \phi$.

Molempien kohtien perusteella väite on todistettu.

(ii) Oletetaan, että kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen. Todistetaan ensin implikaatio vasemmalta oikealle, eli oletetaan, että $\mathcal{F} \vDash \phi$. Koska kaava ϕ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$, niin se on lauseen 2.3 perusteella tosi kehyksessä $\mathcal{F}$ erityisesti silloin, kun kaavassa ϕ esiintyvien propositiosymbolien p paikalle sijoitetaan verum $\top$. Siis $\mathcal{F} \vDash \phi[\top/p]$.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{F} \vDash \phi[\top/p]$. On siis osoitettava, että kaava ϕ on tosi jokaisella valuaatiolla V. Olkoon V mielivaltainen valuaatio, ja määritellään valuaatio V' siten, että $V'(p) = W$. Nyt koska $\mathcal{F} \vDash \phi[\top/p]$ ja $\|\top\| = W$, niin

$$\langle \mathcal{F}, V' \rangle \vDash \phi.$$

Koska kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin lauseen 4.3 perusteella se on vähenevä propositiosymbolin p suhteen. Lisäksi koska $V'(p) = W$, niin $V(p) \subseteq V'(p)$. Näin ollen koska $\langle \mathcal{F}, V' \rangle \vDash \phi$, niin määritelmän 4.7 perusteella $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \phi$. Nyt koska valuaatio V oli mielivaltainen, niin jokaisella valuaatiolla V pätee $\langle \mathcal{F}, V \rangle \vDash \phi$. Eli $\mathcal{F} \vDash \phi$.

Molempien kohtien perusteella väite on todistettu.

$\square$

Lause 4.6. *Jos ϕ on uniforminen modaalilogiikan kaava, niin sitä vastaa predikaattilogiikan lause $c_\phi(x)$.*

Todistus. Todistuksen aluksi sijoitetaan jokaisen kaavassa ϕ esiintyvän propositiosymbolin p paikalle vakio $\top$ tai $\bot$. Jos kaava ϕ on positiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin propositiosymbolin p paikalle sijoitetaan vakio $\bot$. Jos kaava ϕ on negatiivinen propositiosymbolin p suhteen, niin propositiosymbolin p paikalle sijoitetaan vakio $\top$. Merkitään tällä tavoin muodostettua kaavaa symbolilla ϕ'. Kaava ϕ' on siis

$$\phi' = \phi[\psi_1/p_1, \ldots, \psi_n/p_n],$$

missä

$$\psi_i = \begin{cases} \bot, & \text{jos kaava } \phi \text{ on positiivinen propositiosymbolin } p_i \text{ suhteen,} \\ \top, & \text{jos kaava } \phi \text{ on negatiivinen propositiosymbolin } p_i \text{ suhteen.} \end{cases}$$

Nyt koska kaava ϕ' ei sisällä propositiosymboleja, se on määritelmän 4.9 perusteella suljettu kaava. Näin ollen lauseen 4.4 perusteella kaavaa ϕ' vastaa jokin predikaattilogiikan kaava eli

$$\mathcal{F} \vDash \phi' \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \forall x ST_x(\phi').$$

Nyt on vielä osoitettava, että

$$\mathcal{F} \vDash \phi' \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \phi.$$

Merkitään $\phi = \phi_0$ ja $\phi_{i+1} = \phi_i[\psi_{i+1}/p_{i+1}], i = 0, \ldots, n-1$, jolloin $\phi' = \phi_n$. Nyt riittää osoittaa, että

$$\mathcal{F} \vDash \phi_i \Leftrightarrow \mathcal{F} \vDash \phi_{i+1}, i = 0, \ldots, n-1,$$

mikä seuraa suoraan lauseesta 4.5. Näin ollen on osoitettu, että kaavaa ϕ vastaa predikaattilogiikan lause c_ϕ. □

4.4 Todella yksinkertaiset Sahlqvistin kaavat

Nyt voidaan lähteä tarkastelemaan Sahlqvistin kaavoja. Sahlqvistin kaavojen määritelmä jaetaan todella yksinkertaisiin ja yksinkertaisiin Sahlqvistin kaavoihin sekä Sahlqvistin kaavoihin. Sahlqvistin kaavojen tarkastelu aloitetaan todella yksinkertaisista Sahlqvistin kaavoista, joita tarkastellaan tässä luvussa. Määritellään ensin todella yksinkertainen Sahlqvistin edeltäjä ja sitten todella yksinkertainen Sahlqvistin kaava, sillä todella yksinkertaisen Sahlqvistin edeltäjän käsitettä tarvitaan todella yksinkertaisen Sahlqvistin kaavan määritelmässä.

Määritelmä 4.12. (Vrt. [1, s. 156]) *Todella yksinkertainen Sahlqvistin edeltäjä* on kaava, joka muodostuu vain vakioista $\top$ ja $\bot$, propositiosymboleista, konnektiivista $\wedge$ sekä mahdollisuusoperaattorista $\Diamond$.

Määritelmä 4.13. (Vrt. [1, s. 156]) *Todella yksinkertainen Sahlqvistin kaava* on implikaatio $\phi \to \psi$, missä kaava ϕ on todella yksinkertainen Sahlqvistin edeltäjä ja kaava ψ on positiivinen.

Esimerkki 4.4. Todella yksinkertaisia Sahlqvistin kaavoja ovat esimerkiksi kaavat

- $p \to \Diamond p$
- $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$
- $(p \wedge \Diamond p) \to \Diamond p$
- $(p \wedge \Diamond\Diamond q) \to \Box\Diamond q.$

Todella yksinkertaisia Sahlqvistin kaavoja vastaa predikaattilogiikan lause. Muotoillaan tämä lauseeksi ja todistetaan se.

Lause 4.7. *Olkoon $\chi = \phi \to \psi$ todella yksinkertainen Sahlqvistin kaava. Tällöin kaavaa χ vastaa ensimmäisen kertaluvun lause c_χ.*

Todistus. (Vrt. [1, s. 157-159]) Tarkastellaan aluksi kaavaa

$$\forall P_1 \ldots \forall P_n (ST_x(\phi) \to ST_x(\psi)),$$

joka on kaavan χ toisen kertaluvun käännös. Nyt on olemassa sellainen tämän kaavan kanssa ekvivalentti kaava, jossa mitkään kaksi kvanttoria eivät sido samaa muuttujaa ja mikään kvanttori ei sido muuttujaa x. Olkoon tämä kaava

$$\forall P_1 \dots \forall P_n(\gamma \to \delta), \tag{4.1}$$

missä kaava δ on ekvivalentti kaavan $ST_x(\psi)$ kanssa. Tehdään nyt muuttujalle x kvantifiointi siten, että saadaan kaava

$$\forall P_1 \dots \forall P_n \forall x(\gamma \to \delta).$$

Kirjoitetaan tämä kaava nyt uudestaan sellaisessa muodossa, josta ensimmäisen kertaluvun vastaavuus on helppo saada. Ensin on saatava siirrettyä timanttien käännöksistä syntyneet eksistenssikvanttorit kaavasta γ koko implikaation eteen. Käytetään tässä hyväksi ekvivalensseja

$$(\exists x_i \alpha(x_i) \wedge \beta) \leftrightarrow \exists x_i(\alpha(x_i) \wedge \beta)$$

ja

$$(\exists x_i \alpha(x_i) \to \beta) \leftrightarrow \forall x_i(\alpha(x_i) \to \beta),$$

joita hyödynnetään kaavan γ sisällä. Näin voidaan tehdä, koska edellä tehdyn oletuksen perusteella muuttuja x_i ei voi esiintyä vapaana kaavassa β. Jos muuttuja x_i esiintyisi vapaana kaavassa β, niin yllä olevat ekvivalenssit eivät olisi valideja. Lisäksi on hyvä huomata, että alemmassa ekvivalenssissa kaava β itse asiassa on edellä määritelty kaava δ. Ekvivalenssien hyödyntämisen jälkeen saadaan seuraavaa muotoa oleva lause:

$$\forall P_1 \dots \forall P_n \forall x \forall x_1 \dots \forall x_m \Bigg(\Big(\bigwedge_{i \in I} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in K} R(x_i, x_j) \wedge \\ \bigwedge_{l \in T} P_l(x) \wedge \bigwedge_{(l,j) \in L} P_l(x_j) \Big) \to \delta \Bigg),$$

missä indeksijoukot I, K, T ja L määräytyvät kaavasta γ.

Kaavoissa $\bigwedge_{l \in T} P_l(x)$ ja δ esiintyy yksipaikkaisia predikaattisymboleita, jotka ovat muotoa $P_l(z)$. Korvataan kukin tällainen esiintymä disjunktiolla

$$z = x_{l_1} \vee \dots \vee z = x_{l_k},$$

missä muuttujasymbolit $x_{l_1}, \dots, x_{l_k}$ ovat täsmälleen ne muuttujasymbolit x_j, joilla $(l, j) \in L$, eli ne, jotka esiintyvät predikaattisymbolissa P_l. Merkitään tätä disjunktiota symbolilla $\epsilon_l(z)$ sekä kaavasta δ tällä korvauksella saatua kaavaa symbolilla δ'. Korvaamisen lisäksi kaavasta γ poistetaan kokonaan konjunktio $\bigwedge_{(l,j) \in L} P_l(x_j)$.

Poistetaan vielä koko lauseesta predikaattisymbolit sitovat universaalikvanttorit, jolloin saadaan lause

$$c_\chi = \forall x \forall x_1 \dots \forall x_m \Bigg(\Big(\bigwedge_{i \in I} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in K} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{l \in T} \epsilon_l(x) \Big) \to \delta' \Bigg).$$

Lähdetään nyt osoittamaan, että näin muodostettu ensimmäisen kertaluvun lause c_χ vastaa kaavaa χ.

Oletetaan ensin, että kaava χ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$ eli $\mathcal{F} \vDash \phi \to \psi$. Nyt koska kaava χ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$, niin

$$\mathcal{F} \vDash \forall P_1 \dots \forall P_n \forall x \forall x_1 \dots \forall x_m \Bigg(\Big(\bigwedge_{i \in I} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in K} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{l \in T} P_l(x) \wedge \bigwedge_{(l,j) \in L} P_l(x_j) \Big) \to \delta \Bigg). \tag{4.2}$$

Kiinnitetään muuttujille x ja $x_1, \dots, x_m$ tulkinnat a ja $a_1, \dots, a_m$, sekä määritellään relaatiot P_l disjunktion ϵ_l mukaisesti, eli $P_l = \{a_j \mid (l, j) \in L\}$. Tällöin näiden tulkintojen mukaisessa mallissa $\mathcal{M}^*$ on totta kaavan 4.2 kvanttoriton osa eli kaava

$$\Big(\bigwedge_{i \in I} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in K} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{l \in T} P_l(x) \wedge \bigwedge_{(l,j) \in L} P_l(x_j) \Big) \to \delta.$$

Nyt koska näillä tulkinnoilla disjunktio $\epsilon_l(z)$ on ekvivalentti predikaattisymbolin $P_l(z)$ kanssa, mallissa $\mathcal{M}^*$ on totta kaava

$$\Big(\bigwedge_{i \in I} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in K} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{l \in T} \epsilon_l(x) \Big) \to \delta'. \tag{4.3}$$

Oletetaan sitten, että kaava c_χ on validi kehyksessä $\mathcal{F}$ eli $\mathcal{F} \vDash c_\chi$. Tarkastellaan nyt mielivaltaista valuaatiota V. Kiinnitetään muuttujille x ja $x_1, \dots, x_m$ tulkinnat a ja $a_1, \dots, a_m$, ja merkitään $A_l = \{a_j \mid (l, j) \in L\}$, missä $l \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin $V(p_l)$ joko sisältyy joukkoon A_l jokaisella tulkinnalla a_j tai ei sisälly joukkoon A_l jollakin tulkinnalla a_j.Tarkastellaan nämä tapaukset erikseen.

Oletetaan ensin, että $V(p_l)$ ei sisälly joukkoon A_l jollakin tulkinnalla a_j. Tämän tapauksen todistus on triviaali, sillä tällöin lauseen 4.2 konjunktio $\bigwedge_{(l,j) \in L} P_l(x_j)$ tulee epätodeksi. Näin ollen lauseen 4.2 implikaation vasen puoli on epätosi, joten implikaatio on tosi.

Oletetaan sitten, että $V(p_l)$ sisältyy joukkoon A_l jokaisella tulkinnalla a_j. Nyt koska kaava δ on positiivinen jokaisen predikaattisymbolin P_l suhteen, sen totuus säilyy, jos predikaattisymbolin P_l tulkintoja laajennetaan. Toisaalta koska kaava

$$\bigwedge_{i \in I} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in K} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{l \in T} \epsilon_l(x)$$

on tosi ja se on ekvivalentti kaavan

$$\bigwedge_{i \in I} R(x, x_i) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in K} R(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{l \in T} P_l(x) \wedge \bigwedge_{(l,j) \in L} P_l(x_j)$$

kanssa, niin lauseen 4.2 implikaation vasen puoli on tosi.

$\square$

Esimerkki 4.5. (Vrt. [1, s. 157-159]) Tarkastellaan sitten kaavaa $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$. Mudostetaan sen toisen kertaluvun käännös vaihe vaiheelta, jolloin edetään seuraavasti:

1. $\forall P(ST_x(\Diamond p) \to ST_x(\Diamond\Diamond p))$.
2. $\forall P(\exists x_1(R(x, x_1) \wedge ST_{x_1}(p)) \to \exists z_0(R(x, z_0) \wedge ST_{z_0}(\Diamond p)))$.
3. $\forall P(\exists x_1(R(x, x_1) \wedge P(x_1)) \to \exists z_0(R(x, z_0) \wedge \exists z_1(R(z_0, z_1) \wedge ST_{z_1}(p))))$.
4. $\forall P(\exists x_1(R(x, x_1) \wedge P(x_1)) \to \exists z_0(R(x, z_0) \wedge \exists z_1(R(z_0, z_1) \wedge P(z_1))))$.

Implikaation edeltäjässä on nyt timantin käännöksestä syntynyt eksistenssikvanttori, joka tulee siirtää koko implikaation eteen. Tällöin saadaan kaava

$$\forall P \forall x_1((R(x, x_1) \wedge P(x_1)) \to \exists z_0(R(x, z_0) \wedge \exists z_1(R(z_0, z_1) \wedge P(z_1)))).$$

Tehdään nyt predikaattisymboleille P korvaus siten, että $y = x_1$, ja poistetaan predikaattisymbolin P sitova universaalikvanttori, jolloin saadaan kaava

$$\forall x_1((R(x, x_1) \wedge x_1 = x_1) \to \exists z_0(R(x, z_0) \wedge \exists z_1(R(z_0, z_1) \wedge z_1 = x_1))).$$

Tämä kaava voidaan vielä sieventää muotoon

$$\forall x_1(R(x, x_1) \to \exists z_0(R(x, z_0) \wedge R(z_0, x_1))).$$

4.5 Yksinkertaiset Sahlqvistin kaavat

Laajennetaan seuraavaksi Sahlqvistin kaavojen tarkastelu yksinkertaisiin Sahlqvistin kaavoihin. Tätä varten on ensin määriteltävä *laatikkoatomi*. Lisäksi samalla tavoin kuin todella yksinkertaisten Sahlqvistin kaavojen tapauksessa ennen yksinkertaisen Sahlqvistin kaavan määritelmää on määriteltävä yksinkertainen Sahlqvistin edeltäjä.

Määritelmä 4.14. (Vrt. [1, s. 161]) *Laatikkoatomi* on muotoa

$$\Box^k p$$

oleva kaava, jossa p on propositiosymboli ja k on laatikoiden lukumäärä. Kun $k = 0$, laatikkoatomi on vain propositiosymboli p.

Määritelmä 4.15. (Vrt. [1, s. 161]) *Yksinkertainen Sahlqvistin edeltäjä* on kaava, joka muodostuu vain vakioista $\top$ ja $\bot$, laatikkoatomeista, konnektiivista $\wedge$ sekä mahdollisuusoperaattorista $\Diamond$.

Määritelmä 4.16. (Vrt. [1, s. 161]) *Yksinkertainen Sahlqvistin kaava* on implikaatio $\phi \to \psi$, missä kaava ϕ on yksinkertainen Sahlqvistin edeltäjä ja kaava ψ on positiviinen.

Esimerkki 4.6. Yksinkertaisia Sahlqvistin kaavoja ovat kaikki todella yksinkertaiset Sahlqvistin kaavat sekä esimerkiksi kaavat

- $\Box p \to \Diamond p$
- $\Box p \to \Box\Box p$
- $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p.$

Lause 4.8. *Olkoon $\chi = \phi \to \psi$ yksinkertainen Sahlqvistin kaava. Tällöin kaavaa χ vastaa ensimmäisen kertaluvun lause c_χ.*

Todistus. (Ks. [1, s. 162]) Lause todistetaan vastaavasti kuin lause 4.7. $\Box$

4.6 Sahlqvistin kaavat

Lähdetään nyt tarkastelemaan Sahlqvistin kaavoja. Sekä todella yksinkertaiset että yksinkertaiset Sahlqvistin kaavat ovat esimerkkejä Sahlqvistin kaavoista. Määritellään nyt Sahlqvistin kaava täsmällisesti, ja kuten aiemminkin määritellään ennen sitä Sahlqvistin edeltäjä ja tässä tapauksessa myös Sahlqvistin implikaatio.

Määritelmä 4.17. (Vrt. [1, s. 164]) *Sahlqvistin edeltäjä* on kaava, joka muodostuu vain vakioista $\top$ ja $\bot$, laatikkoatomeista ja negatiivisista kaavoista sekä konnektiiveista, $\wedge$ ja $\vee$, ja mahdollisuusoperaattorista $\Diamond$. *Sahlqvistin implikaatio* on implikaatio $\phi \to \psi$, missä kaava ϕ on Sahlqvistin edeltäjä ja kaava ψ on positiivinen.

Määritelmä 4.18. (Vrt. [1, s. 164]) *Sahlqvistin kaava* on kaava, joka muodostuu Sahlqvistin implikaatioista ja jossa voi esiintyä rajattomasti laatikoita ja konjunktiota. Sen sijaan Sahlqvistin kaavassa disjunktioita voi esiintyä vain niiden kaavojen välissä, joilla ei ole yhteisiä propositiosymboleja.

Esimerkki 4.7. Todella yksinkertaisten ja yksinkertaisten Sahlqvistin kaavojen lisäksi Sahlqvistin kaavoja ovat esimerkiksi kaavat

- $\Box(p \to \Box\Diamond p)$
- $(p \wedge \Diamond\neg p) \to \Diamond\Box p$

- $(p \vee \Diamond q) \to \Box\Diamond(p \wedge q)$.

Sen sijaan kaavat

- $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ ja
- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

eivät ole Sahlqvistin kaavoja.

Lause 4.9. *Olkoon χ Sahlqvistin kaava. Tällöin kaavaa χ vastaa ensimmäisen kertaluvun lause c_χ.*

Todistus. (Ks. [1, s. 164]) Lause todistetaan pääasiassa vastaavasti kuin lause 4.7. □

Nyt on siis todettu, että jokaisella Sahlqvistin kaavalla on predikaattilogiikassa korrespondentti. Lisäksi tämä korrespondentti saadaan muodostettua mekaanisella algoritmilla. Sahlqvistin kaavoihin ei kuitenkaan sisälly kaikki sellaiset modaalilogiikan kaavat, joilla on predikaattilogiikassa vastaavuus. Toisin sanoen modaalilogiikan kaavalla, joka ei ole Sahlqvistin kaava, saattaa olla predikaattilogiikassa korrespondentti. Ei ole kuitenkaan olemassa mitään sellaista menetelmää, jolla tämän korrespondentin olemassaolo voitaisiin selvittää. Itse asiassa tämä on *Chagrovan lause*, jonka todistusta ei tässä tutkielmassa tarkastella.

Lause 4.10. *(Chagrovan lause) Ei ole olemassa sellaista menetelmää tai algoritmia, jolla voitaisiin ratkaista ongelma, onko mielivaltaisella modaalilogiikan kaavalla ϕ ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikassa korrespondentti. Näin ollen tämä ongelma on ratkeamaton.*

Viitteet

[1] Blackburn, P., de Rijke, M., Venama, Y. *Modal Logic.* 1st ed., Cambridge University Press, Cambridge UK, 2001.

[2] Chellas, B. F. *Modal logic: an introduction.* 1st ed., Cambridge University Press, Cambridge USA, 1980

[3] Rantala, V., Virtanen, A., *Johdatus modaalilogiikkaan.* 1. painos, Gaudeamus, Helsinki, 2004.

[4] Goranko, V., Hustadt, U., Schmidt, R. A., Vakarelov, D. *SCAN is a complete for all Sahlqvist formulae.* 2002 www.csc.liv.ac.uk/ clare/arw03/abstracts/hustadt.ps

[5] Goranko, V., Vakarelov, D. *Elementary canonical formulae: extending Sahlqvist's theorem.* 2005 http://www2.imm.dtu.dk/ vfgo/papers/APAL-Elementary